MANUEL DE LOGIQUE 1

GUILLAUME BUCCHIONI

IHP - AMU

ANTONIO PICCOLOMINI D'ARAGONA

CGGG - AMU

Table des matières

Introduction

Ce cours de logique est destiné aux étudiants de première année de philosophie. Il ne présuppose aucune connaissance préalable en logique ni en mathématiques. Ce cours a pour but de présenter le calcul logique fondamental, à savoir le calcul des propositions: << Le calcul des propositions a pour objet l'étude des relations logiques entre propositions: il fournit les règles d'inférence permettant d'enchaîner des propositions pour produire des raisonnements valides >> (Denis Vernant, 2001, p. 17). Le calcul des propositions est le langage le plus simple de la logique sur lequel vont se greffer les autres langages logiques que sont le calcul des prédicats, le calcul des classes et le calcul des relations. Ce cours est divisé en 13 sections.

La première section est une introduction aux notions fondamentales du calcul des propositions. Nous allons d'abord présenter une définition de la notion de langage. Pour cela nous allons distinguer plusieurs notions importantes constitutives d'un langage : les notions d'expression, de phrase, d'énoncé et de proposition. Comme son nom l'indique, le calcul des propositions traite des propositions ; nous allons donc examiner principalement cette notion. Nous allons distinguer deux types de propositions : les propositions simples (propositions atomiques) et les propositions complexes (propositions moléculaires). Puis nous allons définir la notion de foncteur propositionnel (aussi nommé connecteur logique) et nous expliquerons la notion de structure logique. Nous verrons enfin comment il est possible de traduire les énoncés du langage ordinaire dans le langage symbolique du calcul des propositions.

La deuxième section traite des principes sémantiques du calcul des propositions. Nous allons distinguer la syntaxe de la sémantique et définir ces deux notions. Puis nous définirons quelques principes sémantiques importants comme le principe de bivalence, le principe de compositionnalité, ou encore le principe de vériconditionnalité. Enfin nous expliquerons une distinction essentielle de la logique formelle : la distinction entre langage-objet et métalangage.

Dans la troisième section nous allons traiter du langage formel propositionnel. Nous allons définir les notions d'alphabet, d'expression bien formée, puis nous présenterons les règles de construction d'un langage formel propositionnel.

Dans la quatrième section nous allons traiter de deux notions sémantiques importantes du calcul des propositions : la vérité et la fausseté. Nous expliquerons alors comment il est possible de construire des matrices (appelées tables de vérité). Enfin nous présenterons les tables de vérité des principaux foncteurs propositionnels, à savoir celles de la négation, de la conjonction, de la disjonction inclusive, de la disjonction exclusive, du conditionnel et du biconditionnel.

La cinquième section est dédiée à l'examen d'une première méthode de preuve, la méthode des tables de vérités. Nous allons d'abord définir les notions de tautologie et d'antilogie. Puis nous expliquerons comment il est possible de vérifier la validité d'une proposition à l'aide de la méthode des tables de vérité. Nous montrerons, à l'aide de plusieurs exemples, la façon dont nous devons procéder pour construire la table de vérité d'une proposition.

Dans la section six nous allons examiner une seconde méthode de preuve, la méthode des arbres. Nous expliquerons comment il est possible de vérifier la validité d'une proposition à l'aide de la méthode des arbres et montrerons, à l'aide de plusieurs exemples, la façon dont nous devons procéder pour construire l'arbre d'une proposition.

Dans la section sept nous allons examiner plus précisément certaines notions importantes du calcul propositionnel. Nous allons proposer des définitions de la conséquence logique, de la tautologie (et de l'antilogie) et de l'équivalence. Ces définitions et les explications de ces définitions feront appel à la notion de table de vérité examinée dans la section 5.

Dans la section huit nous allons examiner une autre notion importante du calcul des propositions, la notion de substitution.

Dans la section neuf nous allons aborder la notion de complétude fonctionnelle. Nous allons d'abord définir la notion de base de foncteur. Nous examinerons ensuite quelques propriétés dont jouissent certaines bases de foncteurs. Enfin nous définirons la notion de forme normale disjonctive et nous montrerons comment construire une forme normale disjonctive.

Dans la section dix nous définirons la notion d'intertraductibilité des foncteurs. Nous montrerons alors comment il est possible de traduire certains foncteurs à l'aide d'autres foncteurs. Ensuite, nous allons définir et examiner plusieurs lois logiques.

Dans la section onze nous allons aborder une troisième méthode de preuve, la méthode de la déduction naturelle (dans la version de Fitch). Nous allons montrer comment la déduction naturelle est utilisée pour prouver qu'un raisonnement est valide. Nous allons ensuite examiner les règles de déduction et expliquer la façon dont nous devons appliquer ces règles. Enfin nous montrerons à l'aide de nombreux exemples comment construire graphiquement une déduction naturelle.

Enfin dans la section douze nous examinerons deux notions sémantiques essentielles du calcul des propositions : la notion de complétude et la notion de cohérence.

Nous remercions Mme Gabriella Crocco et Mme Christine Noël Lemaître pour l'aide apportée à la rédaction de ce cours. Nous remercions également

Jean-Paul Bucchioni et Noémie Halter pour leurs nombreuses remarques sur une version initiale.

Enfin, Guillaume remercie ses deux amis Mario et Luigi. Antonio remercie son grand ami Sonic.

Manuel de Logique 1

Guillaume Bucchioni
IHP - Aix-Marseille Université (AMU)
guillaume.bucchioni@etu.univ-amu.fr

Antonio Piccolomini d'Aragona
CGGG - Aix-Marseille Université (AMU)
Université "La Sapienza" de Rome
antonio.piccolomini-d-aragona@univ-amu.fr

1 Langage, proposition et structure logique

Comme son nom l'indique le calcul des propositions traite des propositions. Nous devons par conséquent expliquer cette notion. Pour cela nous allons commencer par distinguer les notions de langage, d'expression, de phrase, d'énoncé et de proposition. Partons de l'idée qu'un langage est individué par deux éléments.

Définition 1.1. Un *langage* est un couple $\langle \mathtt{AL}, \mathtt{TP} \rangle$ où `AL` est un alphabet et `TP` un ensemble de termes et de phrases construites à partir des éléments de `AL`.

Toute chaîne finie d'éléments de l'alphabet d'un langage peut être appelée une expression de ce langage. Par exemple, si l'alphabet d'un langage quelconque ne contient que le signe graphique **a**, une expression de ce langage sera une chaîne **aaaaa ...** de longueur finie quelconque.

Définition 1.2. Soit `AL` un alphabet pour un langage L, une *expression* de L est une chaîne finie d'éléments de `AL`.

Certaines expressions d'un langage $\langle \mathtt{AL}, \mathtt{TP} \rangle$ obéissent à ce que nous pouvons appeler des *règles de formation de ce langage*. Ces règles nous indiquent comment combiner les éléments de `AL` pour former des expressions faisant parties de `TP`. Ces expressions seront appelées des *expressions bien formées*.

Prenons l'exemple d'un langage ordinaire, le français. Le français peut être caractérisé par l'alphabet habituel composé de 26 lettres, auquel peut être ajouté des espaces, des signes de ponctuation, des chiffres, des signes d'opération ou des relations arithmétiques, des noms, des expressions nominales et des phrases construites à partir de l'alphabet enrichi, selon des règles grammaticales bien définies. Ces règles nous indiquent notamment quelles expressions sont grammaticalement acceptables et celles qui ne le sont pas et qui doivent être rejetées. Par exemple, les expressions suivantes :

- Aabgeti hetuso njdueozng
- Chat toiture dormir beau donc

ne sont pas des expressions acceptées en français car elles violent les règles grammaticales. Par contre les expressions suivantes :

- Puis-je ouvrir la fenêtre ?
- 2 et 2 font 4

sont grammaticalement correctes et sont des expressions acceptées du français. A partir de là il nous est possible de définir la notion de phrase.

Définition 1.3. Soit un langage L, une *phrase* de L est une suite grammaticalement correcte et complète d'expressions de L.

Par exemple

(1) Socrate est mortel

(2) Dégage de là

(3) Est-ce que le chat est sur le tapis?

sont des phrases. Nous devons cependant distinguer au sein des phrases celles qui sont au mode interrogatif (3) ou au mode impératif (2) de celles qui sont au mode déclaratif (1). La logique s'intéresse à un type particulier de phrase : les phrases déclaratives. Nous appellerons ce type de phrases des énoncés.

Définition 1.4. Soit un langage L, un *énoncé* de L est une phrase déclarative énoncée ou inscrite.

Les énoncés ont un statut particulier en logique car ils expriment des *propositions*. Une proposition est ce qui est commun à un ensemble d'énoncés synonymes. Il s'agit de la signification d'un énoncé, de son contenu conceptuel. Plusieurs énoncés différents peuvent exprimer la même proposition s'ils ont la même signification. Par exemple

- Jean est célibataire
- Jean est non marié
- Jean is unmarried
- Jean è scapolo

sont quatre énoncés qui expriment la même proposition. Une proposition a pour caractéristique essentielle de pouvoir être vraie ou fausse. Elle est ce que nous appelons un porteur de vérité. C'est cette caractéristique qui rend ces entités importantes pour la logique.

Définition 1.5. Soit un langage L, une *proposition* est le contenu d'un ou de plusieurs énoncés de L, susceptible d'être vraie ou fausse.

Il est important de souligner que ce n'est pas à la logique de déterminer la vérité ou la fausseté des propositions. Soit on considérera a priori tous les cas possibles, soit on déterminera la vérité et la fausseté a posteriori en faisant appel à une connaissance extra-logique, scientifique ou empirique. Par exemple la proposition $2 + 2 = 4$ est vraie indépendamment du contexte, sa valeur de vérité est déterminée par les lois de l'arithmétique. La valeur de vérité de la proposition *Il pleut*, elle, dépend d'un constat empirique.

La logique s'intéresse donc aux propositions. Nous devons donc comprendre comment il est possible d'extraire les propositions des énoncés du langage ordinaire. Denis Vernant (Vernant 2001) explicite la série d'opérations que nous devons faire pour extraire à partir du langage naturel des propositions. Cette série d'opérations comporte quatre moments :

- Opération d'*abstraction* à partir des énonciations du langage naturel pour obtenir des énoncés simples ou complexes. Il s'agit de faire abstraction du locuteur qui prononce l'énonciation, du temps et du lieu de l'énonciation, de l'interlocuteur à qui est adressée l'énonciation, etc. La logique standard exclut toute dimension pragmatique du discours.

- Opération d'*analyse* qui décompose les propositions complexes (obtenues par abstraction) en propositions atomiques.

- Opération de *formalisation* qui détermine les relations qu'entretiennent entre elles les propositions atomiques à l'intérieur des propositions complexes.

- Opération de *symbolisation* qui désigne les propositions atomiques au moyen de lettres : p, q, r etc. Ces lettres seront appelées variables propositionnelles, car elles indiquent n'importe quelle proposition atomiques. Les relations qu'elles entretiennent au moyen de foncteurs propositionnels seront symbolisées par : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ etc.

Prenons un exemple simple. J'énonce la phrase *Le chat est sur le canapé et il dort.* La première étape consiste à faire abstraction des conditions d'énonciation, à savoir du temps, du lieu, de la situation, des interlocuteurs, etc. La seconde étape consiste à analyser cette proposition et à distinguer deux propositions atomiques au sein de cette proposition complexe, à savoir *Le chat est sur le canapé* et *Il dort.* La troisième étape consiste à constater que ces deux propositions atomiques sont liées logiquement par la conjonction *et* au sein de la proposition complexe. Enfin la quatrième étape consiste à symboliser les différents éléments : on désigne la proposition *Le chat est sur le canapé* par la lettre p, la proposition *Il dort* par la lettre q et la conjonction *et* par le symbole $\wedge$, ce qui nous donne : $p \wedge q$. $p \wedge q$ est ce que l'on appelle la forme propositionnelle de la proposition *Le chat est sur le canapé et il dort.*

Nous avons vu que l'analyse consiste à distinguer les propositions atomiques au sein des propositions complexes. Nous pouvons définir ces deux types de propositions comme suit.

Définition 1.6. Soit un langage L, une *proposition complexe* de L est une proposition qui contient un ou plusieurs foncteurs propositionnels.

Définition 1.7. Soit un langage L, une *proposition atomique* de L est une proposition qui ne contient pas de foncteur propositionnel.

Par exemple *La neige est blanche*, *Socrate est mortel*, $2+2=4$, sont des propositions atomiques tandis que *Napoléon n'a pas gagné la bataille d'Austerlitz*, $2+2=4$ *ou* $2+2=5$, *Il pleut et il fait froid*, *Si l'OM gagne le championnat nous irons faire la fête* sont des propositions complexes. Il est à noter que la proposition *Napoléon n'a pas gagné la bataille d'Austerlitz* est une proposition complexe car elle est composée de la proposition atomique *Napoléon a gagné la bataille d'Austerlitz* et le foncteur propositionnel *non*. Elle pourrait alors se lire *Non Napoléon a gagné la bataille d'Austerlitz*.

Nous appelons foncteurs propositionnels les foncteurs qui, une fois appliqués à des propositions atomiques forment des propositions complexes. Parmi les principaux foncteurs nous avons la négation (qui se lit *non*), la conjonction (qui se lit *et*), la disjonction (qui se lit *ou*) et le conditionnel (qui si lit *si ... alors*).

Il existe deux types de foncteurs propositionnels qui peuvent être classés en fonction de leur *arité*, c'est-à-dire du nombre de propositions auxquelles ils s'appliquent. Il y a les foncteurs à un argument propositionnel comme la négation et à ceux à deux arguments propositionnels comme la conjonction. Nous appelons un foncteur à un argument, un foncteur monadique, et un foncteur à deux arguments, un foncteur dyadique ou un connecteur propositionnel.

Il est important de connaître l'arité des foncteurs pour identifier la structure logique d'une proposition. Identifier la structure logique d'une proposition correspond aux opérations d'analyse et de formalisation exposée plus haut, à savoir, identifier les propositions atomiques et les foncteurs qui composent la proposition complexe. Pour identifier la structure logique d'une proposition nous pouvons suivre la procédure suivante. Étant donnée une proposition P_1,

1. nous devons vérifier si P_1 est atomique ou complexe;
   a) si P_1 est atomique, nous avons terminé;
   b) si P_1 est composée, nous devons identifier le foncteur principal à partir duquel elle est construit est identifié;
      i) si le foncteur principal est monadique, nous devons identifier la proposition P_2 auquel il s'applique et nous retournons au point 1 pour l'analyse de P_2;
      ii) si le foncteur principal est dyadique, nous devons trouver les propositions P_2 et P_3 auxquelles il s'applique, et on retourne point 1, pour l'analyse de P_2, puis pour l'analyse de P_3;

2. si l'analyse de toutes les sous-propositions de P_1 s'est arrêtée au point a), la procédure est terminée.

Prenons un exemple. Soit la proposition complexe suivante :

P_1 Il n'est pas le cas que, si la neige est blanche et ($2 = 4$ ou il fait froid), alors, si l'OM a gagné la Ligue des Champions, alors (David Bowie est un chateur anglais et Muse a donné un concert à Marseille).

Commençons par mettre en évidence les foncteurs :

P_1 **Il n'est pas le cas que**, **si** la neige est blanche **et** ($2 = 4$ **ou** il fait froid), **alors**, **si** l'OM a gagné la Ligue des Champions, **alors** (David Bowie est un chanteur anglais **et** Muse a donné un concert à Marseille).

La proposition est complexe et le foncteur principal est la négation, **Il n'est pas le cas que**, qui s'applique à la proposition :

P_2 **si** la neige est blanche **et** ($2 = 4$ **ou** il fait froid), **alors**, **si** l'OM a gagné la Ligue des Champions, **alors** (David Bowie est un chanteur anglais **et** Muse a donné un concert à Marseille).

Analysons P_2. Cette proposition est aussi complexe et son foncteur principal est le conditionnel, **si ... alors**, qui s'applique aux propositions :

P_3 la neige est blanche **et** ($2 = 4$ **ou** il fait froid)

et

P_4 **si** l'OM a gagné la Ligue des Champions, **alors** (David Bowie est un chanteur anglais **et** Muse a donné un concert à Marseille)

Analysons P_3. P_3 est complexe et a pour foncteur principal la conjonction, **et**, qui s'applique aux propositions :

P_5 la neige est blanche

et

P_6 $2 = 4$ **ou** il fait froid

P_5 est une proposition atomique. P_6 est une proposition complexe qui a pour foncteur principal la disjonction, **ou**, qui s'applique aux propositions :

P_7 2 = 4

et

P_8 il fait froid

P_7 et P_8 sont des propositions atomiques. Nous avons terminé l'analyse de P_3. Passons à l'analyse de P_4. Elle est complexe et son foncteur principal et le conditionnel, **si ... alors**, appliqué aux propositions suivantes :

P_9 l'OM a gagné la Ligue des Champions

et

P_{10} David Bowie est un chanteur anglais **et** Muse a donné un concert à Marseille

P_9 est une proposition atomique. P_{10} est une proposition complexe qui a pour foncteur principal la conjonction, **et**, appliquée aux propositions :

P_{11} David Bowie est un chanteur anglais

et

P_{12} Muse a donné un concert à Marseille

P_{11} e P_{12} sont des propositions atomiques. Nous avons donc terminé la procédure et déterminé la structure logique de la proposition. Il est possible maintenant d'extraire la forme propositionnelle de cet énoncé. Symbolisons les propositions atomiques et les foncteurs propositionnels :

- p : la neige est blanche
- q : 2 = 4
- r : il fait froid
- s : l'OM a gagné la Ligue des Champions
- t : David Bowie est un chanteur anglais
- u : Muse a donné un concert à Marseille
- $\neg$: il n'est pas le cas que
- $\wedge$: et
- $\vee$: ou
- $\rightarrow$: si ... alors

La forme propositionnelle de l'énoncé est :

$$\neg((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge u)))$$

2 Les principes sémantiques de base

Dans les définitions que nous avons proposées dans la section précédente, la définition 1.5, à savoir celle de la proposition, occupe une place particulière. En effet toutes les autres définitions concernent ce que nous nommons la *syntaxe* : ce sont des définitions qui portent uniquement sur le langage et les éléments qui le constituent. Par contre la définition 1.5 fait appel à la notion de *vérité* qui est une notion sémantique. Pour le dire un peu rapidement, la logique peut être divisée en trois domaines :

- la *syntaxe*, qui traite de la définition rigoureuse d'un langage formel et de certaines opérations pouvant y être exécutées. Selon l'approche syntaxique le calcul des propositions se présente sous forme axiomatique, c'est-à-dire que nous établissons les règles de formation et de transformation des formules de ce langage, puis nous fournissons une liste finie d'*axiomes* et de *règles d'inférence* permettant de passer des axiomes aux théorèmes du calcul;

- la *sémantique*, qui traite de la *signification* des éléments d'un langage formel par rapport à un univers de référence, ainsi que de la *vérité*, de la *validité* et des *relations de conséquence* entre les formules du langage lui-même par rapport à cet univers. Selon l'approche sémantique nous interprétons les propositions et les foncteurs logiques en définissant leur signification au moyen des *tables de vérités*.

- la *déduction*, qui concerne l'identification d'une série de lois sur la base desquelles établir des relations de *prouvabilité* et de *déductibilité* entre les formules du langage.

Nous allons à présent voir quelques principes de base de la sémantique formelle. Le premier est communément appelé le *principe de bivalence* :

(B) Toute proposition est soit vraie soit fausse.

Selon ce principe les propositions ne peuvent avoir que deux valeurs de vérité : le vrai ou le faux. Le second principe, qui provient de Frege (Frege 1879, 1884, 1893 - 1903, 2001), est appelé le *principe de compositionnalité* :

(C) Le sens d'une proposition complexe est uniquement fonction du sens des propositions atomiques qui la composent et du sens des foncteurs qui les relient.

Le troisième principe, que l'on doit à la fois à Frege (Frege 1879, 1884, 1893 - 1903, 2001), Russell & Whitehead (Russell & Whitehead 1962) et à Wittgenstein (Wittgenstein 1921) est appelé le principe de vériconditionnalité :

(V) Le sens d'une proposition est déterminé par ses conditions de vérité.

Le principe (C) exprime l'idée que le sens d'une proposition est déterminé par le sens des propositions qui la composent. Par exemple, le sens d'une proposition comme $2 = 4$ *et Johnny Cash est un musicien* dépend uniquement du sens des deux propositions qui la composent, à savoir $2 = 4$ et *Johnny Cash est un musicien*, ainsi que du sens du foncteur conjonctif, *et*, qui relie ces deux propositions.

Le principe (V) exprime l'idée que pour comprendre une proposition nous devons connaître ses conditions de vérité, à savoir les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette proposition soit vraie. Par exemple, connaître le sens d'une proposition telle que *La mer est jaune* cela signifie savoir que ce serait le monde dans lequel cette proposition est vraie.

En combinant les principes (C) et (V), nous pouvons obtenir un principe que nous pouvons exprimer comme suit.

(CV) Les conditions de vérité d'une proposition P sont fonction des conditions de vérité des propositions qui composent P.

Jusqu'à présent nous n'avons vu que des principes portant sur les propositions. Regardons rapidement deux principes portant sur les foncteurs.

(S) Le sens d'un foncteur propositionnel est déterminé par la contribution que cette expression apporte à la détermination du sens des propositions dans lesquelles il est contenu.

En combinant le principe (S) avec le principe (V), on obtient donc un nouveau principe.

(SV) Le sens d'un foncteur est déterminé par la contribution que cette expression apporte à la détermination des conditions de vérité des propositions dans lesquels il est contenu.

Nous verrons dans une prochaine section que le sens des foncteurs nous sera donné par les tables de vérité.

Avant de passer au langage formel du calcul des propositions nous devons mentionner une distinction importante en logique formelle : celle entre le langage et le métalangage.

En effet, en logique formelle nous devons distinguer deux niveaux de langue. Il y a d'une part le *langage-objet* (noté L) qui est un langage symbolique et formel dans lequel s'effectue le calcul logique. Et d'autre part son *métalangage* (L^1) qui permet de parler du langage-objet L. Un langage est symbolique lorsqu'il contient des lettres schématiques. Il est formel lorsque ses inférences peuvent être vérifiées indépendamment de la signification concrète des expressions et symboles que ces inférences contiennent. La symbolisation d'un langage consiste alors à utiliser des lettres schématiques et la formalisation consiste à rendre la déduction indépendante de tout contenu matériel. Pour pouvoir parler de la logique nous devons utiliser un langage qui est différent de cette logique. Ce langage (à savoir le métalangage) est en quelque sorte le langage de l'observateur. Ce métalangage est ici le français enrichi de symboles métalogiques.

Pour pouvoir parler des expressions du langage-objet au sein du métalangage nous devons pouvoir citer les expressions de L dans L^1. Ceci peut se faire de deux manières : soit par la mise entre guillemets, soit par l'usage des *méta-variables*. Prenons un exemple : si p est une proposition de L alors sa citation dans L^1 sera soit "p" soit par une lettre majuscule de l'alphabet (A, B, C, D, etc.).

Les méta-variables combinées avec les foncteurs propositionnels permettent de distinguer les expressions du langage-objet qui ont la même forme et celles qui n'ont pas la même forme. A peut représenter aussi bien les propositions p, q, $p \wedge q$, $p \vee p$, $p \rightarrow q$, etc. A peut représenter n'importe quelle proposition du langage-objet. Maintenant si nous combinons des méta-variables l'expression obtenue ne représentera que les expressions du langage-objet qui ont la même forme logique. Par exemple $A \rightarrow B$ est la forme logique du conditionnel. Elle peut représenter par exemple les expressions de L suivante :

(1) $p \rightarrow p$

(2) $p \rightarrow q$

(3) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(4) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$

(5) $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee q)$

où A et B représentent respectivement dans (1) p et p, dans (2) p et q, dans (3) p et $q \rightarrow r$, dans (4) $p \wedge q$ et $p \wedge r$, et dans (5) $p \rightarrow p$ et $p \vee q$.

Le métalangage permet de citer les expressions du langage-objet mais permet aussi de formuler les propriétés de ce langage. Les propriétés de L ou des expressions de L comme par exemple être vrai, faux, bien formé, démontrable, un théorème, un axiome, une thèse, etc., sont définies dans L^1. Cette distinction faite nous pouvons passer au langage formel du calcul des propositions. Ce langage est ce que nous venons de nommer le langage-objet.

3 Le langage formel propositionnel

Définition 3.1. Le *langage formel propositionnel* `LP` est $\langle$`AL`,`EBF`$\rangle$ où :

- `AL` est l'alphabet constitué de
  - une infinité de variables propositionnelles $p_1, p_2, ..., q_1, q_2, ..., r_1, r_2, ...$;
  - les foncteurs propositionnels $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$;
  - les parenthèses et la virgule;
- `EBF` est l'ensemble des expressions bien formées définies récursivement comme suit :
  - p_i, q_i, $r_i \in$ `EBF`, pour tout $i \in \mathbb{N}$;

- $A \in$ EBF $\Rightarrow \neg(A) \in$ EBF;
- $A, B \in$ EBF $\Rightarrow$
  * $A \wedge B \in$ EBF;
  * $A \vee B \in$ EBF;
  * $A \rightarrow B \in$ EBF;
- rien d'autre n'est un élément de EBF.

Le sous ensemble $\{p_i, q_i, r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de EBF est l'ensemble ATOM des *expression bien formées atomiques* de LP.

En définissant l'ensemble EBF, nous avons signalé que cet ensemble est défini récursivement. Qu'entendons nous par définition récursive? Supposons que nous voulions introduire un ensemble infini d'objets, disons I. Étant donné que I est infini, nous ne pouvons pas donner une liste de ses éléments. Pour avoir une caractérisation rigoureuse, nous devons alors avoir une méthode concrète et exécutable pour la construction de tels éléments. Cette méthode a la forme suivante :

- étant donné un ensemble constructible d'objets J, nous déclarons que tous les éléments de J sont des éléments de I;
- étant donné un élément de I, il existe une procédure bien définie pour former un autre objet, que nous déclarons être un élément de I.

C'est exactement le cas de l'ensemble EBF que nous avons créé avec la définition 3.1 :

- nous avons un ensemble constructible de variables propositionnelles obtenu en prenant les lettres p, q et r et en leur affectant un entier positif i;
- nous déclarons que cet ensemble est contenu dans EBF;
- nous déclarons que, étant donné tout élément de EBF précédemment obtenu, l'objet que nous obtenons en prenant n'importe quel élément, en le mettant entre parenthèses et en apposant $\neg$ à sa gauche, est aussi un élément de EBF;
- nous déclarons que, étant donné deux éléments de EBF précédemment obtenus, l'objet que nous obtenons en plaçant l'un des deux éléments à gauche et l'autre à droite et en plaçant au milieu des deux $\wedge$, $\vee$ ou $\rightarrow$, et en entourant enfin le tout de parenthèses, est aussi un élément de I;
- nous déclarons que les éléments pouvant être obtenus avec les instructions précédentes sont les seuls éléments de EBF.

EBF est un ensemble infini. Par exemple, tous les éléments suivants sont des éléments de EBF :

$$\neg(p_1), \neg(\neg(p_1)), \neg(\neg(\neg(p_1))), \neg(\neg(\neg(\neg(p_1)))), \neg(\neg(\neg(\neg(\neg(p_1))))), \ldots.$$

Par conséquent, le type de définition que nous avons adopté nous a permis de créer un ensemble infini à l'aide d'un ensemble fini d'instructions. L'astuce consiste à identifier quelques éléments de base (l'ensemble des formules atomiques) et, à partir de ceux-ci, à autoriser la construction d'éléments de plus en plus complexes en effectuant, sur des éléments déjà obtenus, un ensemble fixe mais répétable d'opérations (placement des foncteurs). Il convient également de noter que, conformément à la définition 1.2, l'ensemble $\mathtt{E}_{\mathtt{LP}}$ des expressions de LP, c'est-à-dire l'ensemble de chaînes de symboles de AL, est nettement différent de EBF; et en particulier, $\mathtt{EBF} \subset \mathtt{E}_{\mathtt{LP}}$. En d'autres termes, toutes les expressions de LP ne sont pas des expressions bien formées. Par exemple l'expression

$$p_5\ q_7\ r_{100}\ p_3$$

n'est pas un élément de EBF car elle n'est pas une lettre p, q ou r accompagnée d'un entier positif, ni une ou plusieurs lettres accompagnées d'un foncteur. Autre exemple, l'expression

$$(p_1 \vee q_2\ p_5\ q_7\ r_{100}\ p_3)$$

n'est pas non plus une formule. Si tel était le cas alors l'un des éléments auxquels s'applique le foncteur $\vee$, à savoir $p_5\ q_7\ r_{100}\ p_3$ devrait être une formule et nous avons vu que ce n'est pas le cas.

En général il existe des méthodes précises pour montrer si un élément donné de $\mathtt{E}_{\mathtt{LP}}$ est, oui ou non, un élément de EBF. Prenons un exemple. Montrons que l'expression

$$p_1 \rightarrow (\neg q_2 \wedge p_3)$$

est une expression bien formée.

a) D'après la clause 1 de la définition 3.1, nous savons que p_1, q_2 et p_3 sont des éléments de EBF;

b) A partir de a) et d'après la clause 2 de la définition 3.1, nous savons que $\neg q_2$ est un élément de EBF;

c) A partir de a) et de b) et à la clause 3.a de la définition 3.1, nous savons que $\neg q_2 \wedge p_3$ est un élément de EBF;

d) A partir de a) de b) et de c) et de la clause 3.c de la définition 3.1, nous savons que $p_1 \rightarrow (\neg q_2 \wedge p_3)$ est un élément de EBF.

Un dernier point important à noter pour terminer cette section. Dans la définition 3.1, A et B ne sont pas des éléments de EBF (et par conséquent $\neg(A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ ne le sont pas non plus). La raison en est que, comme nous l'avons noté à la fin de la section 2, ce sont des méta-variables. Prenons une comparaison simple pour faire comprendre cela. Supposons que nous lisions un livre écrit en français portant sur la grammaire anglaise. Dans ce livre nous trouvons l'énoncé *aucun mot anglais ne fait 145 lettres*, ou encore, *pour tout mot anglais X, X possède moins de 145 lettres.* Évidemment, X n'est pas un mot anglais, mais une variable que l'auteur de notre livre utilise pour parler de n'importe quel mot anglais et exprimer une propriété qu'ils ont tous en commun.

Maintenant que nous avons vu ce qu'est un langage formel propositionnel nous allons passer à la sémantique formelle de LP, c'est-à-dire, aux notions de vérité et de fausseté appliquées aux propositions et aux foncteurs.

4 Vérité et fausseté

Comme nous l'avons dit dans la section 2, la sémantique de LP obéit au principe (B) selon lequel chaque proposition est soit vraie, soit fausse. Nous notons le vrai : 1, et le faux : 0. Les variables propositionnelles, c'est-à-dire les variables qui représentent des propositions atomiques comme *Il pleut*, *Le ciel est noir*, $3 = 9$, peuvent donc prendre pour valeur soit le vrai, soit le faux. Par conséquent, à chaque proposition atomique de EBF, notre sémantique formelle attribue soit la valeur 1 soit la valeur 0.

Il est évident que si nous nous concentrons sur une seule variable à la fois, disons p, il n'y aura que deux assignations possibles de valeurs de vérité: 1 et 0. Nous pouvons indiquer cela en construisant une matrice comme suit :

p
1
0

Si nous nous concentrons sur deux variables, disons p et q, nous aurons quatre assignations possibles: celle dans laquelle il est assigné 1 aux deux variables, celle dans laquelle il est assigné 1 à p et 0 à q, celle dans laquelle il est assigné 0 à p et 1 à q et celle dans laquelle il est assigné 0 aux deux variables. Nous pouvons le représenter comme suit :

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Avec trois variables, disons p, q et r, nous avons huit possibilités :

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Nous pouvons exprimer cela en général avec la proposition suivante :

Proposition 4.1. Etant données n variables propositionnelles, il y a 2^n assignations de valeurs de vérité à chacune d'elles.

Pour avoir une idée plus concrète de la matrice dessus prenons un exemple dans lequel p est *Lionel Messi joue pour l'OM*, q est *Il fait froid* et r est *David Bowie est vivant.* Et considérons la troisième ligne de la matrice. Cette troisième ligne décrit un monde dans lequel il fait chaud, Lionel Messi joue pour l'OM et David Bowie est en vie, en d'autres termes un monde de rêve !

Nous savons de quelle façon nous pouvons assigner la vérité et la fausseté aux propositions atomiques. Nous allons maintenant voir comment nous pouvons assigner les valeurs de vérités aux propositions complexes. Comme nous l'avons vu précédemment, notre sémantique formelle obéit aux principes (C), (V) et (S), ainsi qu'aux deux principes (CV) et (SV) qui en découlent. Pour le dire simplement, la valeur de vérité d'une proposition complexe sera déterminée à partir des valeurs de vérité des propositions qui la composent, en déterminant comment les foncteurs permettent de passer des valeurs de vérité des propositions les plus simples à la valeur de vérité de la proposition la plus complexe.

Il nous faut donc, dans un premier temps examiner les matrices des différents foncteurs propositionnels. Pour définir ces matrices nous allons utiliser les métavariables (A, B, C, etc.) représentant une proposition simple ou complexe. Nous allons ensuite les lier avec les différents foncteurs. Dans ce qui suit nous allons voir les matrices des principaux foncteurs, à savoir la négation, la conjonction, la disjonction, la disjonction exclusive, le conditionnel et le biconditionnel. Nous laissons de coté pour le moment certains foncteurs tels que l'incompatibilité et le rejet. Nous reviendrons sur ces foncteurs plus tard.

La négation La négation appliquée à A est notée $\neg A$ et génère sa contradictoire. Autrement dit la négation inverse la valeur de A. Elle se lit *non*.

A	$\neg A$
1	0
0	1

L'application de la négation à une proposition simple engendre une proposition complexe de valeur opposée. Lorsque A est vrai $\neg A$ est faux et lorsque A est faux $\neg A$ est vrai.

La conjonction La conjonction se lit *et* et se note $\wedge$.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$A \wedge B$ est vrai lorsque A est vrai et B est vrai et $A \wedge B$ est faux dans tous les autres cas. La conjonction est *commutative*, c'est à dire :

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

Où $\equiv$ est, comme nous le verrons dans la définition 7.3, le symbole métalogique d'équivalence. Cette proposition se lit *A et B est équivalent à B et A*.

La disjonction inclusive (ou disjonction simple) La disjonction inclusive se lit *ou* et se note $\vee$.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A \vee B$ est vrai lorsqu'au moins une des deux propositions est vraie. La disjonction inclusive est aussi commutative :

$$A \vee B \equiv B \vee A.$$

La disjonction exclusive Nous devons distinguer la disjonction inclusive (que nous nommerons simplement disjonction) de la *disjonction exclusive*. La disjonction exclusive se lit toujours *ou* et se note $\sqcup$.

A	B	$A \sqcup B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A \sqcup B$ est vrai lorsqu'exactement une des deux propositions est vraie. La disjonction exclusive vérifie donc l'équivalence :

$$A \sqcup B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Le conditionnel Le conditionnel se lit *si ..., alors* et se note $\rightarrow$.

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$A \rightarrow B$ est faux lorsque A (c'est-à-dire l'antécédent) est vrai et B (c'est-à-dire le conséquent) est faux. Nous devons distinguer le conditionnel de l'implication. L'implication appartient au métalangage et est valide c'est-à-dire toujours vraie. L'implication exprime la validité du conditionnel. Le conditionnel vérifie :

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$$

C'est ce que l'on appelle la *définition positive* du conditionnel. Le conditionnel vérifie aussi l'équivalence :

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

C'est ce que l'on appelle la *définition négative* du conditionnel.

Le biconditionnel Le biconditionnel se lit *si et seulement si* et se note $\leftrightarrow$.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$A \leftrightarrow B$ est vrai lorsque les deux propositions A et B ont la même valeur de vérité. Le biconditionnel doit être distingué de l'équivalence qui appartient au métalangage. Le biconditionnel vérifie l'équivalence :

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

qui, pour l'équivalence précédente concernant $\rightarrow$, devient

$$A \leftrightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)$$

Maintenant que nous avons vu les matrices des principaux foncteurs, nous sommes en mesure d'aborder la première méthode d'évaluation de la validité des propositions : la méthode des tables de vérité.

5 Les tables de vérité

Une catégorie de propositions est particulièrement importante pour la logique, ce sont les propositions valides, c'est-à-dire les propositions toujours vraies, peu importe l'assignation de valeurs de vérité aux propositions simples qui les composent. Ces propositions sont appelées des *tautologies*. Une tautologie peut être remplacée par le symbole $\top$.

A l'inverse, les propositions toujours fausses, peu importe l'assignation de valeurs de vérité aux propositions simples qui les composent sont appelées *antilogies* et peuvent être remplacées par le symbole $\bot$.

Les tautologies sont importantes car elles expriment ce qu'on appelle, usuellement, *lois logiques*. Il est donc essentiel de pouvoir déterminer si une proposition quelconque est une tautologie ou non. La première méthode de preuve que nous allons aborder est celle des tables de vérité. Cette méthode de preuve a été utilisée par Peirce, Boole et Frege (Peirce 1893; Boole 1847; Frege 1879, 1884, 1893 - 1903), mais a été précisément et systématiquement explicitée et étudiée par Post (Post 1921) et Wittgenstein (Wittgenstein 1921).

Nous allons voir comment il est possible de construire des tables de vérité à l'aide de plusieurs exemples. Vérifions la validité de la proposition

$$p \to (q \wedge \neg\neg p).$$

à l'aide de la méthode des tables de vérité. La première chose à faire est de déterminer le nombre de propositions atomiques pour pouvoir déterminer le nombre d'assignation de valeur de vérité comme il l'a été stipulé dans la Proposition 4.1. Ici le nombre de propositions atomiques est 2 et par conséquent le nombre de valeurs de vérité de chaque proposition est $2^2 = 4$.

On commence par placer les valeurs de vérité sous les propositions atomiques. Si une proposition atomique est répétée, ici p, nous devons répéter la même assignation de valeurs de vérité.

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1				1	
1			0				1	
0			1				0	
0			0				0	

Ensuite nous devons assigner les valeurs de vérités au foncteur le plus interne. Ici c'est la proposition $\neg p$. Pour assigner les valeurs de vérité à cette proposition nous devons utiliser la définition du foncteur négation. Cela nous donne

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1			0	1	
1			0			0	1	
0			1			1	0	
0			0			1	0	

Ensuite, passons à $\neg\neg p$:

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1		1	0	1	
1			0		1	0	1	
0			1		0	1	0	
0			0		0	1	0	

et puis à $q \wedge \neg\neg p$:

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1	1	1	0	1	
1			0	0	1	0	1	
0			1	0	0	1	0	
0			0	0	0	1	0	

Enfin nous pouvons terminer la table par le foncteur principal qui est un conditionnel qui relie p et $q \wedge \neg\neg p$. Cela nous donne :

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1	1		1	1	1	0	1	
1	0		0	0	1	0	1	
0	1		1	0	0	1	0	
0	1		0	0	0	1	0	

La formule est fausse sur la deuxième ligne, par conséquent elle n'est pas une tautologie. Vérifions la validité de la proposition

$$p \to (p \wedge \neg\neg p).$$

Ici il n'y a qu'une seule proposition atomique, donc $2^1 = 2$ assignations de valeur de vérité. Cela nous donne :

p	$\to$	(	p	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1				1	
0			0				0	

Ensuite assignons les valeurs de vérité au foncteur le plus interne. Ici $\neg p$. Cela nous donne :

p	$\to$	(	p	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1			0	1	
0			0			1	0	

Continuons avec le foncteur le plus interne restant, à savoir $\neg\neg p$. Cela nous donne :

p	$\to$	(	p	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1		1	0	1	
0			0		0	1	0	

Continuons avec le foncteur le plus interne restant, à savoir $p \wedge \neg\neg p$. Cela nous donne :

p	$\rightarrow$	(	p	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1			1	1	1	0	1	
0			0	0	0	1	0	

Enfin nous pouvons terminer la table par le foncteur principal qui est un conditionnel qui relie p et $p \wedge \neg\neg p$. Cela nous donne :

p	$\rightarrow$	(	p	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1	1		1	1	1	0	1	
0	1		0	0	0	1	0	

Toutes les valeurs de la proposition sont 1. Par conséquent la proposition $p \rightarrow (p \wedge \neg\neg p)$ est toujours vraie : c'est une tautologie. Passons à

$$(p \vee q) \leftrightarrow p$$

On commence par placer les valeurs de vérité sous les propositions atomiques.

(	p	$\vee$	q	)	$\leftrightarrow$	p
	1		1			1
	1		0			1
	0		1			0
	0		0			0

Puis on passe au foncteur le plus interne : $p \vee q$. Cela nous donne :

(	p	$\vee$	q	)	$\leftrightarrow$	p
	1	1	1			1
	1	1	0			1
	0	1	1			0
	0	0	0			0

Enfin la proposition finale :

(	p	$\vee$	q	)	$\leftrightarrow$	p
	1	1	1		1	1
	1	1	0		1	1
	0	1	1		0	0
	0	0	0		1	0

La formule n'est pas une tautologie, car sur la troisième ligne la valeur de vérité est 0. Considerons maintenant la proposition

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Commençons par les propositions atomiques :

(	p	→	q	)	→	(	¬	q	→	¬	p	)
	1		1					1			1	
	1		0					0			1	
	0		1					1			0	
	0		0					0			0	

Passons maintenant aux foncteurs les plus internes, $\neg q$ et $\neg p$, et puis à $p \rightarrow q$ et $\neg q \rightarrow \neg p$:

(	p	→	q	)	→	(	¬	q	→	¬	p	)
	1	1	1				0	1	1	0	1	
	1	0	0				1	0	0	0	1	
	0	1	1				0	1	1	1	0	
	0	1	0				1	0	1	1	0	

Et enfin, la proposition complète :

(	p	→	q	)	→	(	¬	q	→	¬	p	)
	1	1	1		1		0	1	1	0	1	
	1	0	0		1		1	0	0	0	1	
	0	1	1		1		0	1	1	1	0	
	0	1	0		1		1	0	1	1	0	

Toutes les valeurs sont 1, donc la formule est une tautologie. Encore un exemple, à savoir la proposition

$$\neg(p \vee \neg p)$$

Commençons par les propositions atomiques :

¬	(	p	∨	¬	p	)
		1			1	
		0			0	

Passons au foncteur le plus interne $\neg p$:

¬	(	p	∨	¬	p	)
		1		0	1	
		0		1	0	

Puis

¬	(	p	∨	¬	p	)
		1	1	0	1	
		0	1	1	0	

Et enfin

¬	(	p	∨	¬	p	)
0		1	1	0	1	
0		0	1	1	0	

Les valeurs de vérités de $\neg(p \vee \neg p)$ sont toutes 0, donc la proposition est toujours fausse : c'est une antilogie.

Terminons cette série d'exemples en vérifiant la validité d'une proposition avec trois atomes, à savoir :

$$\neg p \vee (q \wedge \neg\neg r).$$

Comme il y a trois propositions atomiques, il y aura $2^3 = 8$ lignes sur la table de vérité de cette formule. D'abord, attribuons les valeurs de vérités aux atomes, ce qui nous donne :

$\neg$	p	$\vee$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	r	)
	1			1				1	
	1			1				0	
	1			0				1	
	1			0				0	
	0			1				1	
	0			1				0	
	0			0				1	
	0			0				0	

Ensuite, passons à $\neg p$ et à $\neg r$, et puis, sans faire tous les passages intermédiaires, à $\neg\neg r$:

$\neg$	p	$\vee$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	r	)
0	1			1		1	0	1	
0	1			1		0	1	0	
0	1			0		1	0	1	
0	1			0		0	1	0	
1	0			1		1	0	1	
1	0			1		0	1	0	
1	0			0		1	0	1	
1	0			0		0	1	0	

Passons à $q \wedge \neg\neg r$:

$\neg$	p	$\vee$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	r	)
0	1			1	1	1	0	1	
0	1			1	0	0	1	0	
0	1			0	0	1	0	1	
0	1			0	0	0	1	0	
1	0			1	1	1	0	1	
1	0			1	0	0	1	0	
1	0			0	0	1	0	1	
1	0			0	0	0	1	0	

Enfin, la proposition complète :

¬	p	∨	(	q	∧	¬	¬	r	)
0	1	1		1	1	1	0	1	
0	1	0		1	0	0	1	0	
0	1	0		0	0	1	0	1	
0	1	0		0	0	0	1	0	
1	0	1		1	1	1	0	1	
1	0	1		1	0	0	1	0	
1	0	1		0	0	1	0	1	
1	0	1		0	0	0	1	0	

Cette formule n'est donc pas une tautologie.

6 La méthode des arbres

La méthode des arbres, aussi appelée la méthode des tableaux sémantiques, a été inventée par Hintikka (Hintikka 1955) et Beth (Beth 1962). La méthode des arbres a un avantage sur la méthode des tables de vérité : celui de ne considérer que les valeurs de vérité pertinentes pour la question de la validité, alors que la méthode des tables de vérité envisage toutes les valeurs de vérité possibles. La méthode des arbres est donc beaucoup plus rapide et beaucoup moins lourde que celle des tables de vérité.

La méthode des arbres consiste à raisonner par l'absurde : pour montrer qu'une proposition est une tautologie nous faisons l'hypothèse qu'elle est fausse et si cette hypothèse entraîne nécessairement une contradiction, c'est-à-dire l'affirmation et la négation d'une même proposition, alors la proposition de départ est valide. Car si une proposition entraîne nécessairement une contradiction alors c'est une antilogie et la négation d'une antilogie est une tautologie.

Comme son nom l'indique cette méthode consiste à construire un arbre. Dans cette représentation graphique les disjonctions sont représentées par des embranchements alors que les conjonctions sont représentées par des segments de branches. Chaque foncteur propositionnel possède sa propre représentation graphique. Nous allons maintenant examiner les représentations graphiques des principaux foncteurs, à savoir le conditionnel, la disjonction, la conjonction, le biconditionnel et la négation.

Un dernier point : si nous considérons qu'une proposition A est vraie nous inscrivons simplement cette proposition. Si nous considérons que la proposition A est fausse alors nous inscrivons $\neg A$. Nous partons du conditionnel.

<u>Le conditionnel</u> Considérons la proposition $A \rightarrow B$. Si nous considérons qu'elle est fausse alors nous l'écrirons $\neg(A \rightarrow B)$. Il n'y a qu'un cas où $A \rightarrow B$ est faux c'est lorsque A est vrai et B est faux. Le fait qu'il n'y a qu'un seul cas de fausseté de $A \rightarrow B$ va nous permettre d'inscrire les deux composants sur la même branche comme ceci :

$$\begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Ce qui signifie que $A \to B$ est faux lorsque A est vrai et B est faux. Si nous considérons que la proposition $A \to B$ est vraie alors nous l'écrirons $A \to B$. Il y a alors deux possibilités : soit A est faux soit B est vrai. Comme il y a deux possibilités nous n'écrirons pas les deux composants sur la même branche mais sur des branches différentes comme ceci :

$$\begin{array}{ccc} & A \to B & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & B \end{array}$$

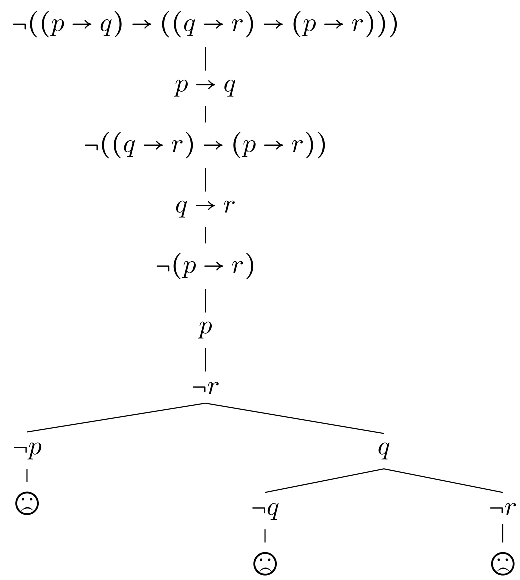
Ce qui signifie que $A \to B$ est vrai lorsque A est faux ou B est vrai. Comme nous le voyons, lorsque nous avons un *et* nous plaçons les composants sur la même branche et lorsque nous avons un *ou* nous plaçons les composants sur deux branches différentes. Lorsque nous avons une contradiction sur une branche (deux propositions contradictoires comme A et sa négation $\neg A$) nous fermons la branche à l'aide du symbole ☹. Pour qu'une formule soit une tautologie il faut que toutes les branches soient fermées. Exemples. Vérifions la validité de la proposition

$$p \to (q \to p)$$

à l'aide de la méthode des arbres.

$$\begin{array}{c} \neg(p \to (q \to p)) \\ | \\ p \\ | \\ \neg(q \to p) \\ | \\ q \\ | \\ \neg p \\ | \\ \text{☹} \end{array}$$

La première étape est de supposer que $p \to (q \to p)$ est faux. Nous plaçons la négation devant la proposition. Il n'y a qu'un seul cas, lorsque p et vrai et $q \to p$ est faux. Nous plaçons donc p et $\neg(q \to p)$ sur la même branche. Ensuite nous passons à $\neg(q \to p)$, voir $q \to p$ est faux. Il n'y a qu'un seul cas, lorsque q et vrai et p est faux. Nous plaçons donc q et $\neg p$ sur la même branche. Nous retrouvons sur la même branche les propositions p et $\neg p$. Il y a une contradiction et nous fermons la branche. Puisque toutes les branches sont fermées, alors la proposition $p \to (q \to p)$ est une tautologie. Prenons un autre exemple :



La première étape est de supposer que $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ est faux. Nous plaçons la négation devant la proposition. Il n'y a qu'un seul cas, lorsque $(p \to q)$ et vrai et $(q \to r) \to (p \to r)$ est faux. Nous plaçons donc $(p \to q)$ et $\neg((q \to r) \to (p \to r))$ sur la même branche. Ensuite nous avons deux possibilités : soit nous développons $p \to q$, soit nous développons $\neg((q \to r) \to (p \to r))$. Une règle pratique est de toujours développer les formules qui ne produisent pas d'embranchement. La formule $(p \to q)$ produit un embranchement alors que la formule $\neg((q \to r) \to (p \to r))$ se développe sur la même branche. Passons donc au développement de $\neg((q \to r) \to (p \to r))$. Il n'y a qu'un seul cas, lorsque $(q \to r)$ est vrai et $p \to r$ est faux. Nous plaçons donc $q \to r$ et $\neg(p \to r)$ sur la même branche. Ensuite nous avons deux possibilités : soit nous développons $q \to r$, soit nous développons $\neg(p \to r)$. $q \to r$ produit un embranchement alors que $\neg(p \to r)$ se développe sur la même branche. Passons donc au développement de $\neg(p \to r)$. $p \to r$ est faux lorsque p est vrai et r est faux. Nous plaçons donc p et $\neg r$ sur la même branche. Il nous reste maintenant deux formules à développer : $p \to q$ et $q \to r$. Commençons par $p \to q$, qui est vraie lorsque p est faux ou q est vraie. Nous plaçons donc $\neg p$ et q sur deux branches différentes. Sur la branche de gauche nous avons p et $\neg p$. Il y a une contradiction et nous fermons la branche. Enfin nous développons la dernière formule $q \to r$, qui est vraie lorsque q est faux ou r est vraie. Nous plaçons donc $\neg q$ et r sur deux branches différentes. Sur la branche du milieu nous avons q et $\neg q$. Il y a une contradiction et nous fermons la branche. Sur la branche de droite nous avons r et $\neg r$. Il y a une contradiction et nous fermons la branche. Puisque toutes les branches sont fermées alors la proposition $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ est une tautologie. Passons maintenant aux règles de construction des arbres d'autres foncteurs propositionnels.

La négation Pour la négation, nous n'avons qu'une règle, à savoir :

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ A \end{array}$$

La conjonction Pour la conjonction, les règles sont :

$$\begin{array}{c} A \land B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \land B)} \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

La disjonction inclusive Pour la disjonction inclusive, les règles sont :

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \lor B} \\ A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

La disjonction exclusive Pour la disjonction exclusive, les règles sont :

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \sqcup B} \\ A & \neg A \\ | & | \\ \neg B & B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \sqcup B)} \\ A & \neg A \\ | & | \\ B & \neg B \end{array}$$

Le biconditionnel Pour le biconditionnel, les règles sont :

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{A \leftrightarrow B} \\ A & \neg A \\ | & | \\ B & \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\neg(A \leftrightarrow B)} \\ \neg A & A \\ | & | \\ B & \neg B \end{array}$$

Il n'y a qu'une seule règle pour la négation. Lorsque nous nions une proposition fausse cela nous donne une proposition vraie. C'est la règle de la *double négation*.

Considérons la proposition conjonctive $A \land B$. Elle est fausse soit lorsque le membre de gauche est faux (une branche avec $\neg A$) soit lorsque le membre de droite est faux (une branche avec $\neg B$). Elle est vraie dans un seul cas : lorsque les deux membres sont vrais simultanément. Nous aurons A et B sur la même branche.

Passons à la proposition disjonctive inclusive $A \vee B$. Nous avons le cas où elle est fausse. Nous l'écrirons $\neg(A \vee B)$. Elle est fausse seulement dans le cas où les deux membres de la disjonction sont faux simultanément. Nous aurons donc $\neg A$ et $\neg B$ sur la même branche. Pour le cas où elle est vraie nous l'écrirons $A \vee B$. Elle est vraie dans deux cas : soit lorsque le membre de gauche est vrai (une branche avec A) soit lorsque le membre de droite est vrai (une branche avec B).

Pour ce qui concerne la proposition disjonctive exclusive $A \sqcup B$ nous avons d'une part le cas où elle est fausse, ce qui peut se produire de deux manières : soit les deux membres sont vrais (A et B sur la même branche) soit les deux membres sont faux ($\neg A$ et $\neg B$ sur la même branche). D'autre part le cas où elle est vraie peut se produire aussi de deux manières : soit le membre de gauche est faux et le membre de droit est vrai ($\neg A$ et B sur la même branche) soit le membre de gauche est vrai et le membre de droite est faux (A et $\neg B$ sur la même branche).

Pour la proposition biconditionnelle nous avons d'une part le cas où elle est vraie, ce qui peut se produire de deux manières : soit les deux membres sont vrais (A et B sur la même branche) soit les deux membres sont faux ($\neg A$ et $\neg B$ sur la même branche). D'autre part le cas où elle est fausse peut se produire aussi de deux manières : soit le membre de gauche est faux et le membre de droit est vrai ($\neg A$ et B sur la même branche) soit le membre de gauche est vrai et le membre de droite est faux (A et $\neg B$ sur la même branche).

Nous allons à présent vérifier la validité des propositions suivantes à titre d'exemples :

1) $p \rightarrow (p \vee q)$

2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

3) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

4) $(p \vee \neg q) \rightarrow r$

$$\begin{array}{c} \neg(p \rightarrow (p \vee q)) \\ | \\ p \\ | \\ \neg(p \vee q) \\ | \\ \neg p \\ | \\ ☹ \end{array}$$

$$\neg((p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r))))$$

$$p \to q$$

$$\neg((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$$

$$p \to r$$

$$\neg(p \to (q \wedge r))$$

$$p$$

$$\neg(q \wedge r)$$

- $\neg q$
  - $\neg p$
    - ☹
  - q
    - ☹
- $\neg r$
  - $\neg p$
    - ☹
  - r
    - ☹

$$\neg((p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \to \neg q))$$

- $p \wedge q$
  - $\neg\neg(p \to \neg q)$
  - $p \to \neg q$
  - p
  - q
    - $\neg p$
      - ☹
    - $\neg q$
      - ☹
- $\neg(p \wedge q)$
  - $\neg(p \to \neg q)$
  - p
  - $\neg\neg q$
  - q
    - $\neg p$
      - ☹
    - $\neg q$
      - ☹

$$\neg((p \vee \neg q) \to r)$$

$$p \vee \neg q$$

$$\neg r$$

- p
  - ☺
- $\neg q$
  - ☺

Les propositions 1), 2) et 3) sont des tautologies. Par contre la proposition 4) n'est pas une tautologie puisqu'il y a des branches de l'arbre qui ne sont pas fermées.

Nous venons d'examiner deux méthodes de preuve à savoir la méthode des tables de vérité et la méthode des arbres. Ces deux méthodes sont des méthodes sémantiques. Nous examinerons dans la section 11 une méthode de preuve syntaxique, la *déduction naturelle*. Mais avant cela nous allons examiner plus précisément certaines notions sémantiques du calcul des propositions.

7 Conséquence, tautologie et équivalence

Dans cette section nous allons proposer un examen plus précis de certaines notions importantes du calcul propositionnel. Les trois définitions qui suivent utilisent les tables de vérité, et sont celles de la conséquence logique, de la tautologie (et de l'antilogie) et de l'équivalence.

La conséquence logique
Étant données deux formules A et B, on dit que B est une conséquence logique de A si, et seulement si, chaque fois que A est vraie, alors B est vraie. Plus généralement, étant données les formules $A_1, ..., A_n, B$, on dit que B est une conséquence logique de $A_1, ..., A_n$ si, et seulement si, lorsque toutes les $A_1, ..., A_n$ sont vraies, alors B est vraie. Nous pouvons maintenant en formuler la définition suivante.

Définition 7.1. Etant données les formules $A_1, ..., A_n, B$, nous dirons que B est une *conséquence logique* de $A_1, ..., A_n$ si et seulement si, pour toutes les rangées R des tables de vérité de $A_1, \ldots, A_n, B$, si, pour tout $i \leq n$, la valeur de A_i sur R est 1, alors la valeur de B sur R est 1. Nous indiquerons que B est une conséquence logique de $A_1, ..., A_n$, par $A_1, ..., A_n \vDash B$ et nous indiquerons que B n'est pas une conséquence logique de $A_1, ..., A_n$ par $A_1, ..., A_n \nvDash B$.

Pour le dire autrement, $A_1, ..., A_n \vDash B$ si et seulement si dans la matrice de $A_1, ..., A_n, B$, sur *toutes les rangées* dans lesquelles les propositions $A_1, ..., A_n$ ont la valeur 1, la proposition B a aussi la valeur 1. Nous pouvons représenter cela comme suit :

A_1	A_2	A_3	$\ldots$	A_{n-1}	A_n	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	$\ldots$	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

D'un autre coté $A_1, ..., A_n \nvDash B$ si et seulement si dans la matrice de $A_1, ..., A_n, B$, il y a *au moins une rangée* dans laquelle les propositions $A_1, ..., A_n$ ont la valeur 1 et la proposition B a la valeur 0. Nous pouvons représenter cela comme suit :

A_1	A_2	A_3	$\dots$	A_{n-1}	A_n	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	$\dots$	1	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nous devons noter que la définition 7.1. requière que *toutes* les valeurs de $A_1, ..., A_n$, soient égales à 1. Donc si nous trouvons une matrice comme :

A_1	A_2	A_3	$\dots$	A_{n-1}	A_n	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	1	$\dots$	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

nous ne pouvons pas affirmer que $A_1, ..., A_n \nvDash B$. En particulier, s'il n'y a pas de rangées telles que toutes les valeurs de $A_1, ..., A_n$ sont 1, alors $A_1, ..., A_n \vDash B$; en fait, si $A_1, ..., A_n \nvDash B$, il devrait y avoir une rangée où toutes les $A_1, ..., A_n$ ont 1, ce qui contredit notre hypothèse. Faisons un exemple simple : démontrons que $\neg(p \wedge \neg q), p \vDash q$.

$\neg$	(	p	$\wedge$	$\neg$	q	)	p	q
1		1	0	0	1		1	1
0		1	1	1	0		1	0
1		0	0	0	1		0	1
1		0	0	1	0		0	0

Pour vérifier que $\neg(p \wedge \neg q), p \vDash q$, nous devons regarder les rangées où à la fois $\neg(p \wedge \neg q)$ et p ont valeur 1, et nous assurer que sur ces rangées q a aussi valeur 1. Ici, il n'y a qu'une seule rangée où $\neg(p \wedge \neg q)$ et p ont toutes les deux valeur 1, c'est la première, et sur cette rangée q a valeur 1. Donc, $\neg(p \wedge \neg q), p \vDash q$.

La tautologie

Etant donnée une formule A, nous dirons que A est une tautologie si et seulement si elle est toujours vraie. Plus précisément, nous aurons la définition suivante.

Définition 7.2. A est une *tautologie* si et seulement si la table de vérité de A a la valeur 1 sur toutes les rangées. Nous indiquerons que A est une tautologie par $\vDash A$ et que A n'est pas une tautologie par $\nvDash A$. A l'inverse, A est une *antilogie* si et seulement si la table de vérité de A a la valeur 0 sur toutes les rangées.

Dans la section 5 nous avons donné des exemples pour vérifier si une proposition est une tautologie, une antilogie, ou ni une tautologie ni une antilogie, à l'aide des table de vérité. Nous devons juste noter que $\nvDash A$ n'implique pas nécessairement que A soit une antilogie. $\nvDash A$ signifie que dans la table de vérité de A toutes les lignes n'ont pas la valeur 1, mais pas que toutes les lignes ont la valeur 0.

L'équivalence logique
Etant données deux formules A et B, nous dirons que A et B sont logiquement équivalentes si et seulement si elles sont vraies en même temps, ou fausses en même temps. Nous avons donc la définition suivante.

Définition 7.3. Etant données les formules A et B, nous dirons que A et B sont *logiquement équivalentes* si et seulement si les tables de vérité de A et de B ont les mêmes valeurs sur toutes les rangées. Nous indiquerons que A et B sont logiquement équivalentes par $A \equiv B$.

À ce stade, nous pouvons démontrer des résultats simples mais utiles.

Proposition 7.4. Soit B une conjonction de n formule de type :

$$A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge (... \wedge (A_{n-1} \wedge A_n)...))).$$

Alors pour toutes les rangées R de la matrice de B, B a la valeur 1 sur R si et seulement si, pour tout $i \leq n$, A_i a la valeur 1 sur R.

Preuve. Nous pouvons montrer que la proposition est exacte. Étant donné la matrice B et la définition sémantique du foncteur de la conjonction, B a la valeur 0 sur les rangées qui ont la configuration suivante :

A_1	$\wedge$	(	A_2	$\wedge$	(	$\dots$	(	A_{n-1}	$\wedge$	A_n	)	$\dots$	)	)
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
1	0		1	0				1	0	0				
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
1	0		1	0				0	0	1				
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
1	0		0	0				1	1	1				
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
0	0		1	1				1	1	1				
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Nous trouvons la valeur 1 uniquement sur les rangées ayant la configuration :

A_1	$\wedge$	(	A_2	$\wedge$	(	$\dots$	(	A_{n-1}	$\wedge$	A_n	)	$\dots$	)	)
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
1	1		1	1				1	1	1				
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

D'autre part, si nous savons que B a la valeur de 0, une valeur de 0 est affectée à l'une des deux conjonctions les plus internes, et ceci ne se produit que si nous nous trouvons dans la première configuration ; si c'est l'inverse alors nous avons la deuxième configuration.

Proposition 7.5. Etant données les formules $A_1, ..., A_n, B$, on a $A_1, ..., A_n \models B$ si et seulement si

$$\models A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge (... \wedge (A_{n-1} \wedge A_n)...))) \to B.$$

Preuve. Par commodité nous noterons

$$A_1 \wedge (A_2 \wedge (A_3 \wedge (... \wedge (A_{n-1} \wedge A_n)...)))$$

à l'aide de la méta-variable C. Supposons d'abord que $A_1, ..., A_n \models B$. Cela signifie que, pour chaque ligne R de la matrice de $A_1, ..., A_n, B$, si, pour chaque $i \leq n$, A_i a la valeur 1, B a également la valeur 1, c'est-à-dire que nous n'avons pas de rangée du type :

$$\begin{array}{cccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n & B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Supposons alors par l'absurde que $\not\models C \to B$. Alors, il existe une ligne R de la matrice de $C \to B$ dans laquelle $C \to B$ a la valeur 0. Par la définition sémantique du foncteur $\to$, cela ne peut se produire que lorsque sur R nous avons la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccc} C & \to & B \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Par contre, d'après la proposition 7.4, sur la ligne R, la valeur affectée à C peut être 1 si et seulement si, sur la même ligne, la valeur 1 est assignée à tous A_i. Prenons la matrice de $C \to B$, et effectuons les opérations suivantes :

1. éliminons les $\wedge$ qui relient les A_i et le $\to$ qui lie la conjonction des A_i à B;

2. éliminons toutes les parenthèses entourant les A_i;

3. insérons une barre verticale entre A_n et B.

Nous avons obtenu une matrice de $A_1, ..., A_n, B$ dans laquelle, sur la rangée de chaque A_i il y a la valeur 1, et sur celle de B il y a la valeur 0. Mais c'est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle $A_1, ..., A_n \models B$. Donc $\models C \to B$. Nous avons donc montré par l'absurde que $A_1, ..., A_n \models B$ implique $\models C \to B$. Nous laissons le soin au lecteur d'effectuer la démonstration de l'inverse.

Proposition 7.6. Etant données les formules A et B, $A \equiv B$ si et seulement si

$$\models (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Preuve. Supposons que $\models (A \to B) \wedge (B \to A)$. Cela signifie que la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$ a la valeur 1 sur toutes les rangées. D'après la définition du foncteur $\to$, cela se produit lorsque, sur chaque rangée de la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$, $A \to B$ a la valeur 1 et $B \to A$ a la valeur 1. Supposons alors que A et B ne sont pas logiquement équivalents. Cela signifie que, dans les matrices combinées de A et de B, il y a au moins une rangée R dans laquelle A a la valeur 1 et B a la valeur 0 ou A a la valeur 0 et B a la valeur 1. En observant les matrices de A et de B, on observe que la valeur de A sur R est identique à la valeur de A sur R dans la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$, et la valeur de B sur R est identique à la valeur de B sur R dans la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Mais alors, s'il existait une rangée comme R, par la définition sémantique du foncteur $\to$, il existerait une rangée de la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$ où $A \to B$ a la valeur 0 ou $B \to A$ a la valeur 0, et il existerait donc une rangée de la matrice de $(A \to B) \wedge (B \to A)$ dans laquelle $(A \to B) \wedge (B \to A)$ a la valeur 0. Ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc A et B sont logiquement équivalents. En conclusion $\models (A \to B) \wedge (B \to A)$ implique $A \equiv B$. Nous laissons le soin au lecteur d'effectuer la démonstration de l'inverse.

8 La substitution

Nous allons maintenant voir une notion importante pour le calcul des propositions : la substitution. Commençons par la notion de sous-formule :

Définition 8.1. L'ensemble $S(A)$ des *sous-formules* de A est spécifié comme suit :

- $A \in S(A)$;
- $B \in S(A) \Rightarrow$
  - $B = \neg C \Rightarrow C \in S(A)$
  - $B = C \wedge D \Rightarrow C \in S(A)$ e $D \in S(A)$
  - $B = C \vee D \Rightarrow C \in S(A)$ e $D \in S(A)$
  - $B = C \to D \Rightarrow C \in S(A)$ e $D \in S(A)$.

Considérons par exemple la proposition suivante :

$$p \wedge (\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \to \neg\neg\neg q \vee \neg q.$$

En appliquant la définition précédente nous obtenons que l'ensemble des sous-formules de cette formule est l'ensemble contenant les éléments suivants :

- $p \wedge (\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \to \neg\neg\neg q \vee \neg q$
- p
- $(\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \to \neg\neg\neg q \vee \neg q$

- $\neg\neg q \wedge (r \vee s)$
- $\neg\neg\neg q \vee \neg q$
- $r \vee s$
- $\neg\neg\neg q$
- $\neg\neg q$
- $\neg q$
- r
- s
- q

Il convient de noter que, si nous identifions une formule qui avait déjà été incluse dans l'ensemble, cette formule ne sera pas réécrite. Par exemple, en analysant la sous-formule :

$$\neg\neg q \wedge (r \vee s)$$

nous trouvons la sous-formule :

$$\neg\neg q.$$

Puis en analysant la sous formule :

$$\neg\neg\neg q \vee \neg q$$

nous trouvons la sous-formule :

$$\neg\neg\neg q$$

et donc de nouveau la sous-formule :

$$\neg\neg q$$

que nous avons déjà obtenue. Cette sous-formule n'est contenue qu'une seule fois dans la liste.

Nous pouvons maintenant, sans la définir de manière rigoureuse, introduire la notion de *substitution*. Etant donnée une formule A, on désigne par $A[C/B]$ la formule obtenue à partir de A en remplaçant la sous-formule B de A par la formule C. Prenons deux exemples pour comprendre le fonctionnement de ce principe. Considérons la formule

$$p.$$

Alors

$$p[q \wedge r/p]$$

est

$$q \wedge r.$$

Considérons la formule

$$p \wedge (\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \rightarrow \neg\neg\neg q \vee \neg q.$$

Alors

$$(p \wedge (\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \rightarrow \neg\neg\neg q \vee \neg q)[r \wedge s/\neg q]$$

est

$$p \wedge (\neg(r \wedge s) \wedge (r \vee s)) \rightarrow \neg\neg(r \wedge s) \vee (r \wedge s).$$

En d'autres termes, étant donné A, pour obtenir $A[C/B]$ nous devons prendre toutes les occurrences de B dans A et nous lui substituons C. Nous pouvons remarquer que si $B \notin S(A)$ alors $A[C/B] = A$.

Proposition 8.2. Si $B \equiv C$, alors $A \equiv A[C/B]$.

Preuve. Si $B \notin S(A)$, $A[C/B] = A$, et bien sûr, $A \equiv A$. Si $B \in S(A)$, alors dans la matrice de A il y a une colonne avec les valeurs de vérités de B. Puisque B équivaut à C, B et C ont les mêmes matrices. Quand on remplace B par C, donc la matrice de B par la matrice de C, cela ne change rien dans la matrice finale de A, et ainsi nous obtenons la matrice de $A[C/B]$. Donc $A \equiv A[C/B]$.

Dans cette section et la précédente nous avons examiné quelques notions importantes du calcul des propositions : la conséquence logique, la tautologie, l'antilogie, l'équivalence et la substitution. Toutes ces notions nous serviront dans la prochaine, où nous allons nous intéresser à la notion de complétude fonctionnelle.

9 La complétude fonctionnelle

Dans cette section, nous allons traiter de la notion de *base de foncteurs*. Après avoir présenté cette notion nous ferons une brève digression afin d'identifier une propriété fondamentale.

9.1 Arité des foncteurs et bases de foncteurs

Dans la section 4, nous avons présenté, sous forme de matrices de 1 et 0, les définitions sémantiques des foncteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\sqcup$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$. Ces définitions sont des tables qui, à certaines paires de 1 et 0, attribuent une des deux valeurs 1 ou 0. Les six matrices que nous avons présentées n'épuisent évidemment pas toutes les combinaisons possibles, c'est-à-dire toutes les assignations possibles des deux valeurs 1 ou 0 à des paires de 1 et 0. Par exemple, la matrice

A	$\perp A$
1	0
0	0

est différente de celle du foncteur $\neg$. De la même façon une matrice comme

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

ne correspond à aucune matrice de foncteurs binaires que nous avons jusqu'à maintenant rencontrées. Cependant, en généralisant la procédure que nous avons adoptée dans le cas des foncteurs du langage LP, nous pouvons dire que chacune des deux matrices mentionnées ci-dessus correspond à un foncteur possible - le foncteur unaire que nous avons indiqué avec $\perp$ et le foncteur binaire nous avons indiqué avec $|$. Maintenant, en assimilant chaque matrice possible qui attribue l'une des deux valeurs 1 ou 0 à n-uples de 1 et 0 - c'est-à-dire des séquences de n valeurs 1 ou 0, voir des couples de 1 et 0 pour $n = 2$, ou des triplés de 1 et 0 pour $n = 3$, ou des quadruples de 1 et 0 avec $n = 4$, et ainsi de suite - à des foncteurs possibles, nous avons ce qui suit :

Proposition 9.1. Étant donné un entier positif n, il existe 2^{2^n} foncteur n-adiques.

En particulier, il y a $2^{2^1} = 4$ foncteurs monadiques, et $2^{2^2} = 16$ foncteurs dyadiques. Mais puisque l'ensemble des entiers positifs est infini, il y aura des une infinité de foncteurs.

Chacun de ces foncteurs, que nous représenterons par $\bullet$, aura une arité finie - c'est-à-dire qu'il s'appliquera toujours à un nombre bien déterminé n d'arguments - et peut être sémantiquement défini par une matrice du type

A_1	A_2	$\dots$	A_n	$\bullet(A_1, A_2, ..., A_n)$
v_1^1	v_1^2	$\dots$	v_1^n	v_1
v_2^1	v_2^2	$\dots$	v_2^n	v_2
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{2^n}^1$	$v_{2^n}^2$	$\dots$	$v_{2^n}^n$	v_{2^n}

où $v_j^i \in \{1, 0\}$ pour $i \leq n$, $j \leq 2^n$, et où tout ce qui se trouve à gauche de la barre verticale épuise tout les possibles n-uple de 1 et 0.

Définition 9.2. Nous appelons *base de foncteurs* tout ensemble fini de foncteurs.

Ainsi, par exemple, les ensembles

$$\{\neg\},\ \{\wedge, \vee\},\ \{\neg, \wedge, \rightarrow\},\ \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\},\ \dots$$

sont tous des bases de foncteurs. En général pour tous foncteurs d'arité arbitraire $\bullet_1, ..., \bullet_n$,

$$\{\bullet_1, ..., \bullet_n\}$$

est une base de foncteurs. Muni de cette définition nous pouvons maintenant poser la question fondamentale suivante : existe-t-il une base de foncteurs $\mathfrak{B}$ qui possède la propriété selon laquelle chaque foncteur n-adique peut être exprimé, de manière sémantiquement équivalente, comme une combinaison de certains ou de tous les foncteurs de $\mathfrak{B}$?

Si une telle base existe alors nous allons pouvoir facilement nous limiter à un nombre *fini* de foncteurs nécessaires, car nous serons certains que tout foncteur possible, de toute arité possible, peut être exprimé, de manière équivalente, comme une combinaison de foncteurs que nous possédons. En d'autres termes, cette question est fondamentale car si nous pouvons y répondre par l'affirmative cela signifie qu'un petit nombre de foncteurs vont nous permettre d'exprimer tous les foncteurs possibles !

Pour pouvoir formuler une réponse à cette question nous avons d'abord besoin d'une autre notion, celle de forme normale disjonctive.

9.2 Forme normale disjonctive

Etant donnés les foncteurs $\bullet_1, ..., \bullet_n$, et étant donné les matrices qui les définissent sémantiquement, il est possible d'appliquer la méthode des tables de vérité aux formules construites dans un langage contenant les foncteurs $\bullet_1, ..., \bullet_n$.

Définition 9.3. Soit A une formule construite à partir des atomes $p_1, ..., p_n$ et des foncteurs $\bullet_1, ..., \bullet_m$ définis de manière appropriée par des matrices. La *forme normale disjonctive* A^D de A est construite à partir des atomes $p_1, ..., p_n$ et des foncteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, de la manière suivante :

- si la matrice de A montre que A est une contradiction, c'est-à-dire qu'elle a la valeur 0 pour chaque rangée, alors $A^D = q \wedge \neg q$, pour n'importe quel atome q;
- s'il existe des rangées de la matrice de A dans lesquelles la valeur est 1, on procède comme suit :
  1. on sélectionne les rangées $R_1, ..., R_s$ de la matrice de A sur lesquelles la valeur de A est 1 ;
  2. pour chaque rangée R_i avec $i \leq s$, on regarde l'affectation des valeurs de vérité à $p_1, ..., p_n$ sur R_i ;
  3. pour tout $j \leq n$, si p_j a la valeur 1 sur R_i, on laisse p_j inchangé, alors que si p_j a la valeur 0 sur R_i, on écrit $\neg p_j$;
  4. de cette manière, pour chaque rangée R_i, nous obtenons un ensemble d'atomes ou de négations d'atomes que nous pouvons indiquer par At_i ;

5. puis nous faisons la conjonction de tous les éléments de At_i : nous indiquons cette conjonction avec $\bigwedge At_i$;
6. nous faisons la disjonction de tous les $\bigwedge At_i$;
7. $A^D = \bigwedge At_1 \vee ... \vee \bigwedge At_s$.

En d'autres termes, pour construire la forme normale disjonctive de toute formule on prend les lignes dans lesquelles la matrice de cette formule a la valeur 1 ; puis sur chaque ligne nous formons la conjonction de tous les atomes si ils ont la valeur 1 ou négations d'atomes si ils ont la valeur 0 ; enfin on fait la disjonction de toutes les conjonctions obtenues. Prenons quelques exemples. Construisons d'abord la forme normale disjonctive de la proposition suivante :

$$p \to (p \wedge \neg p).$$

On construit sa table de vérité :

p	$\to$	(	p	$\wedge$	$\neg$	p	)
1	0		1	0	0	1	
0	1		0	0	1	0	

Puis on sélectionne la rangée dans laquelle la formule a la valeur 1, à savoir

p	$\to$	(	p	$\wedge$	$\neg$	p	)
0	1		0	0	1	0	

Comme la valeur de p (l'unique atome à partir de laquelle la proposition est construite) est 0 nous pouvons affirmer que la forme normale disjonctive de $p \to (p \wedge \neg p)$ est $\neg p$, ce que nous écrivons : $(p \to (p \wedge \neg p))^D = \neg p$. Construisons maintenant la forme normale disjonctive de la proposition suivante :

$$p \to (q \wedge \neg\neg p)$$

Construisons d'abord sa table de vérité :

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1	1		1	1	1	0	1	
1	0		0	0	1	0	1	
0	1		1	0	0	1	0	
0	1		0	0	0	1	0	

Puis on sélectionne les rangées dans lesquelles la formule a la valeur 1, à savoir

p	$\to$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	p	)
1	1		1	1	1	0	1	
0	1		1	0	0	1	0	
0	1		0	0	0	1	0	

Sur la première rangée les valeurs de p et de q sont 1, ce qui correspond à la conjonction $p \wedge q$. Sur la seconde rangée la valeur de p est 0 et la valeur de q est 1, ce qui correspond à la conjonction $\neg p \wedge q$. Enfin sur la troisième rangée les valeurs de p et de q sont 0, ce qui correspond à la conjonction $\neg p \wedge \neg q$. Nous avons donc $(p \rightarrow (q \wedge \neg\neg p))^D = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Pour terminer construisons la forme normale disjonctive de la proposition suivante :

$$\neg p \vee (q \wedge \neg\neg r)$$

Construisons d'abord sa table de vérité :

$\neg$	p	$\vee$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	r	)
0	1	1		1	1	1	0	1	
0	1	0		1	0	0	1	0	
0	1	0		0	0	1	0	1	
0	1	0		0	0	0	1	0	
1	0	1		1	1	1	0	1	
1	0	1		1	0	0	1	0	
1	0	1		0	0	1	0	1	
1	0	1		0	0	0	1	0	

Puis on sélectionne les rangées dans lesquelles la formule a la valeur 1, à savoir

$\neg$	p	$\vee$	(	q	$\wedge$	$\neg$	$\neg$	r	)
0	1	1		1	1	1	0	1	
1	0	1		1	1	1	0	1	
1	0	1		1	0	0	1	0	
1	0	1		0	0	1	0	1	
1	0	1		0	0	0	1	0	

Sur la première rangée les valeurs de p, q et r sont 1 ce qui nous donne la conjonction suivante $p \wedge q \wedge r$. Sur la seconde rangée la valeur de p est 0 et les valeurs de q et r sont 1 ce qui nous donne la conjonction suivante $\neg p \wedge q \wedge r$. Sur la troisième rangée les valeurs de p et r sont 0, et la valeur de q est 1, ce qui nous donne la conjonction suivante $\neg p \wedge q \wedge \neg r$. Sur la quatrième rangée les valeurs de p et q sont 0 et la valeur de r est 1, ce qui nous donne la conjonction suivante $\neg p \wedge \neg q \wedge r$. Sur la cinquième rangée les valeurs de p, q et r sont 0, ce qui nous donne la conjonction suivante $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$. Nous avons donc que $(\neg p \vee (q \wedge \neg\neg r))^D$ est la formule

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Avec cette notion de forme normale disjonctive nous pouvons formuler la proposition essentielle suivante.

Proposition 9.4. Soit A une formule construite à partir des foncteurs quelconques $\bullet_1, ..., \bullet_n$ d'arité quelconque. Alors A^D est logiquement équivalente à A.

Pour avoir un aperçu de la vérité de cette proposition vous pouvez faire les tables de vérité des formes normales disjonctives que nous avons construites.

9.3 Bases fonctionnellement complètes

La proposition 9.4 va nous permettre de répondre à la question de la section 9.1. En effet, elle nous dit que pour toute formule qui utilise un foncteur il existe une formule équivalente qui utilise uniquement les foncteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$. En d'autres termes, la proposition répond positivement à notre question. Nous pouvons à présent formuler la définition suivante

Définition 9.5. Soit $\mathfrak{B}$ une base de foncteurs. $\mathfrak{B}$ est dite *fonctionnellement complète* si et seulement si pour chaque formule A construite à partir de foncteurs quelconques, il existe une formule A^* construite à l'aide des seuls foncteurs de $\mathfrak{B}$ et telle que $A \equiv A^*$.

La question que nous nous sommes posée à propos de la possibilité de réécrire tous les foncteurs possibles sur une base quelconque devient donc, en vertu de cette définition, la question de savoir s'il existe des bases fonctionnellement complètes. Et la réponse à cette question est oui. Nous pouvons alors formuler la proposition suivante :

Proposition 9.6. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est une base de foncteurs fonctionnellement complète.

Preuve. Soit A une formule quelconque, construite à partir de foncteurs quelconques. La formule A^* dans la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est tout simplement A^D, qui d'après la proposition 9.4 est logiquement équivalente à A.

D'après la proposition 9.6 suit évidemment que chaque base de foncteurs contenant les foncteurs $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète. La base de foncteurs utilisée plus spécifiquement pour `LP` est la base $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, qui est par conséquent elle aussi complète.

Nous avons vu ce qu'était une base de foncteurs et nous avons examiné la notion de complétude fonctionnelle. Dans la section suivante nous allons nous pencher sur l'intertraductibilité des foncteurs.

9.4 L'intertraductibilité des foncteurs

A la fin de la section précédente nous avons identifié deux bases de foncteurs complètes sur le plan fonctionnel : $\{\neg, \wedge, \vee\}$ et $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. La question que nous pouvons alors nous poser est s'il en existe d'autres, peut-être même plus restreintes que $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Il existe différentes manières de répondre par l'affirmative. Nous adoptons une stratégie reposant sur les faits suivants :

- la complétude fonctionnelle de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ et
- l'intertraductibilité des foncteurs de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ avec des foncteurs d'une autre base $\mathfrak{B}$.

Qu'entendons-nous par intertraductibilité ? L'idée est la suivante : soit un foncteur $\bullet$ et une base de foncteurs $\mathfrak{B}$, on dit $\bullet$ est traductible dans $\mathfrak{B}$ s'il peut s'exprimer comme une combinaison d'éléments de $\mathfrak{B}$. Ce qui est valable pour $\bullet$, sera valable pour toutes les formules utilisant la combinaison sur $\mathfrak{B}$ à laquelle $\bullet$ équivaut. En d'autres termes, à partir d'un foncteur n-adique $\bullet$, on dira qu'il est traductible en foncteurs $\bullet_1, ..., \bullet_n$ si et seulement si il existe un moyen de *transformer* chaque formule du type $\bullet(A_1, ..., A_n)$ construit à partir des atomes $p_1, ..., p_n$, dans une formule A construite à partir des mêmes atomes, dans laquelle apparaitront seulement (mais pas nécessairement tous) les foncteurs $\bullet_1, ..., \bullet_n$ de telle sorte que $\bullet(A_1, ..., A_n) \equiv A$.

Maintenant, en vertu des propositions 9.5 et 9.6, chaque foncteur n-adique $\bullet$ est intertraductible avec les foncteurs $\neg, \wedge, \vee$. Par conséquent, si nous pouvions prouver que les foncteurs de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$sont intertraductibles avec ceux d'un autre base de foncteurs $\mathfrak{B}$, nous pourrions conclure que $\mathfrak{B}$ est également complet du point de vue fonctionnel. En effet, l'intertraductibilité d'un foncteur impliquant la réécriture de ce dernier comme une combinaison d'autres foncteurs, on pourrait dans ce cas mettre en place le raisonnement suivant :

- étant donné un foncteur quelconque $\bullet$, d'arité n, nous savons qu'il peut être exprimé par une combinaison de foncteurs dans la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$;
- étant donné une formule A utilisant $\bullet$, nous substituons toute formule du type $\bullet(A_1, ..., A_n)$ dans A avec la formule qui lui est logiquement équivalente dans la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$, obtenant la formule A^* dans la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ logiquement équivalente à A ;
- on sait que les foncteurs de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ sont intertraductibles avec les foncteurs d'une autre base $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire quechaque foncteur F de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ peut être exprimé sous la forme d'une combinaison de foncteurs dans la base $\mathfrak{B}$;
- dans A^*, nous substituons à chaque formule B construite à partir de F la formule qui lui est logiquement équivalente B^* dans la base $\mathfrak{B}$, obtenant la formule A^{**} dans la base $\mathfrak{B}$ logiquement équivalente à A^* ;
- par transitivité de la relation d'équivalence logique, A^{**} est logiquement équivalent à A ;
- par conséquent $\mathfrak{B}$ est fonctionnellement complète.

Bien sûr, si nous trouvons alors que les foncteurs de la base fonctionnellement complète $\mathfrak{B}$ ainsi trouvée sont intertraductibles avec ceux d'une autre base $\mathfrak{B}^*$, nous pourrons de la même manière conclure que $\mathfrak{B}^*$ est également fonctionnellement complète.

En conclusion, pour montrer qu'une base $\mathfrak{B}^*$ est fonctionnellement complète, il faut montrer qu'il est possible de transformer de manière univoque toutes les formules construites avec les foncteurs d'une base $\mathfrak{B}$ connue pour être fonctionnellement complète, dans une formule construite avec foncteurs de $\mathfrak{B}^*$. De plus, dire que la transformation doit être établie de manière univoque signifie qu'il doit exister un théorème garantissant que chaque formule construite avec des foncteurs en $\mathfrak{B}$ est logiquement équivalente à une autre avec des foncteurs en $\mathfrak{B}^*$. Un exemple classique est en ce sens offert par deux résultats simples mais importants connus sous le nom de théorèmes de De Morgan (De Morgan 1966), du nom du mathématicien qui les a utilisé pour la première fois.

Proposition 9.7 (De Morgan)**.** Pour toute formule A, pour toute formule B :

- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$;
- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

À la lumière de la proposition 9.7, sachant que la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est fonctionnellement complète, nous pouvons en conclure que les bases $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ le sont également. En fait, en appliquant le raisonnement ci-dessus, en utilisant une formule avec n'importe quel foncteur, nous le transformons en une formule logiquement équivalente dans la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$, puis en utilisant les théorèmes de De Morgan, nous transformons la formule de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ dans une formule logiquement équivalente dans la base $\{\neg, \wedge\}$ ou dans la base $\{\neg, \vee\}$. Prenons un exemple pour faire comprendre cette procédure. Transformons la proposition :

$$(p \vee (\neg q \wedge r)) \vee (\neg\neg r \vee q)$$

de la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$ en proposition de base $\{\neg, \wedge\}$. En utilisant les théorèmes de De Morgan, nous transformons d'abord les formules de complexité minimale :

- $\neg q \wedge r$ est déjà dans la base $\{\neg, \wedge\}$, nous la laissons donc telle quelle ;
- $\neg\neg r \vee q$ peut être simplifiée en éliminant la double négation dans $r \vee q$ et, à l'aide des théorèmes de De Morgan devient $\neg(\neg r \wedge \neg q)$.

On peut donc réécrire la formule originale comme suit :

$$(p \vee (\neg q \wedge r)) \vee \neg(\neg r \wedge \neg q)$$

En montant en complexité, on note que la formule $p \vee (\neg q \wedge r)$ n'est pas dans la base $\{\neg, \wedge\}$. $p \vee (\neg q \wedge r)$, à l'aide des théorèmes de De Morgan devient $\neg(\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r))$. À ce stade, nous sommes arrivés à la formule

$$\neg(\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \vee \neg(\neg r \wedge \neg q).$$

La dernière étape concerne donc le foncteur principal de la formule de départ. En appliquant les théorèmes de De Morgan, nous obtenons

$$\neg(\neg\neg(\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \wedge \neg\neg(\neg r \wedge \neg q))$$

et en éliminant les doubles négatifs nous obtenons

$$\neg((\neg p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \wedge (\neg r \wedge \neg q))$$

qui est une formule dans la base $\{\neg, \wedge\}$. À titre d'exercice, le lecteur peut essayer d'établir l'intertraductibilité des foncteurs $\wedge$ et $\vee$ avec les foncteurs de la base $\{\neg, \rightarrow\}$ et donc conclure que la base $\{\neg, \rightarrow\}$ est fonctionnellement complète. Toujours utile, le lecteur peut essayer de montrer que les bases $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont fonctionnellement complètes, sachant que la base $\{\neg, \rightarrow\}$ l'est, c'est-à-dire en essayant d'établir l'intertraductibilité de $\rightarrow$ avec espectivement les foncteurs des bases $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$. (Nous donnerons ces intertraductibilités dans la section suivantes).

Pour conclure cette section, nous pouvons nous demander s'il existe des bases complètes de foncteurs de taille minimale, c'est-à-dire des bases ne contenant qu'un seul élément. La réponse est oui. Ces bases nous ont été données par Sheffer (Sheffer 1913) (les bases minimales fonctionnellement complètes contiennent des éléments appelés constantes de Sheffer).

Proposition 9.8 (Sheffer)**.** Soit $|$ et $\downarrow$ des foncteurs binaires définis par les matrices suivantes :

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Les bases de foncteurs $\{\ |\ \}$ et $\{\downarrow\}$ sont fonctionnellement complètes et sont les seules bases de foncteurs fonctionnellement complets de taille minimale.

Preuve. Nous prouvons la complétude fonctionnelle de $\{\ |\ \}$ en montrant comment les foncteurs de $\{\neg, \wedge\}$ peuvent tous deux être intertraductibles en $|$. En fait, nous avons :

- pour chaque formule A, $\neg A \equiv (A \mid A)$
- pour chaque formule A, pour chaque formule B, $A \wedge B \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$.

A titre d'exercice, le lecteur peut prouver que nous pouvons traduire les foncteur de la base $\{\neg, \wedge\}$ dans la base $\{\downarrow\}$. La preuve de l'unicité est omise.

Dans la section suivante nous abordons les différentes lois et intertraductibilité des différents foncteurs.

10 Un petit bestiaire de lois propositionnelles

Nous allons examiner certaines lois du calcul propositionnel. Le lecteur peut les vérifier à l'aide des tables de vérité ou des arbres.

La double négation $\neg\neg A \equiv A$

L'idempotence La répétition de $\wedge$ ou $\vee$ sur une proposition est équivalente à la proposition : $A \star A \star ... \star A \equiv A$. Nous avons donc

- $A \wedge A \equiv A$
- $A \vee A \equiv A$

La commutativité Elle vaut pour tous les foncteurs sauf pour le conditionnel. L'ordre des propositions est indifférent : $A \star B \equiv B \star A$. Nous l'avons anticipé pour $\wedge$ et $\vee$, et plus en général :

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$
- $A \sqcup B \equiv B \sqcup A$
- $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$

L'associativité Elle vaut pour tous les foncteurs sauf pour le conditionnel : $(A \star B) \star C \equiv A \star (B \star C)$. Donc

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \sqcup B) \sqcup C \equiv A \sqcup (B \sqcup C)$
- $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

La simplification $A \wedge \top \equiv A$, et $A \vee \bot \equiv A$. Donc, dès que nous avons une formule B telle que $B \equiv \top$, on aura $A \wedge B \equiv A$, et dès que nous avons une formule B telle que $B \equiv \bot$, on aura $A \vee B \equiv A$.

La distributivité Elle met en jeu des couples (et non des paires) de foncteurs (un couple est une paire ordonnée) : $A \star (B \bullet C) \equiv (A \star B) \bullet (A \star C)$. Donc :

- pour $(\wedge, \vee)$
  - $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- pour $(\rightarrow, \wedge)$: $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
- pour $(\rightarrow, \vee)$
  - $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$
  - $A \vee (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$

L'absorption Elle vaut pour la conjonction par rapport à la disjonction, et pour la disjonction par rapport à la conjonction : $A \star (A \bullet B) \equiv A$. Nous avons donc

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

La contraction Elle vaut entre la disjonction et la conjonction.

- $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv A$
- $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv A$

Les lois de De Morgan Nous avons déjà vu deux de ces lois, dans la proposition 9.7. En voici d'autres :

- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Intertraductibilité des foncteurs Nous présentons certaines lois qui nous permettent de passer de certaines bases de foncteurs à d'autres. Parmi ces lois nous retrouvons les lois de De Morgan. Les voici :

- $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$
- $\neg(A \rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$
- $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
- $\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$
- $\neg(A \wedge B) \equiv (A \rightarrow \neg B)$
- $A \vee B \equiv (\neg A \rightarrow B)$
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \rightarrow B)$

Le lecteur peut essayer de trouver les autres lois pour traduire $\sqcup$ et $\leftrightarrow$ à l'aide des autres foncteurs disponibles, et vice versa.

Parmi ces lois, on a aussi des principes généraux.

Le principe d'identité $A \to A$

Le tiers exclu $A \vee \neg A$

Le principe de non-contradiction $\neg(A \wedge \neg A)$

La contraposition $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

La transitivité $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

L'exportation $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$

Le réduction à l'absurde positive $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

La réduction à l'absurde négative $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

Le principe d'explosion $\neg A \to (A \to B)$

Le premier axiome de Frege-Hilbert $A \to (B \to A)$

La loi de Peirce $((A \to B) \to A) \to A$

11 La déduction naturelle

Nous avons vu dans les sections 5 et 6 deux méthodes de preuve sémantiques, la méthode des tables de vérité et la méthode des arbres. Dans cette section nous allons nous pencher sur une méthode de preuve syntaxique : la déduction naturelle. Cette méthode a été introduite par Gentzen (Gentzen 1934 - 1935), bien que nous allons l'exposer suivant la forme graphique proposée par Fitch (Fitch 1952).

La déduction naturelle est utilisée pour construire des raisonnements partant de certaines hypothèses, et nous conduisant à certaines conclusions. Un raisonnement est composé d'un nombre fini d'hypothèses et d'une conclusion, et d'un chemin des unes à l'autre dont les étapes s'appellent *inférences*. Un exemple d'un raisonnement dans le langage ordinaire, se composant d'une seule inférence, est :

- Prémisse 1 : Mon chat miaule seulement lorsqu'il a faim

- Prémisse 2 : Mon chat miaule
- Conclusion : Mon chat a faim

Dans le langage logique, le fait qu'il y a un raisonnement de $A_1, ..., A_n$ à B est symbolisé par $A_1, ..., A_n \vdash B$, où $A_1, ..., A_n$ sont les hypothèses en nombre fini, B est la conclusion et $\vdash$ est le symbole de la déduction.

Comment fonctionne la déduction naturelle ? Imaginons que nous voulons prouver que $A_1, ..., A_n \vdash B$. Nous allons commencer par *assumer* toutes les propositions $A_1, ..., A_n$, puis par l'application de *règles de déduction*, que nous allons détailler dans un instant, nous allons en déduire B. Un point à noter : nous aurons parfois besoin, pour réussir notre déduction, de faire appel à des *hypothèses auxiliaires*, c'est-à-dire à de nouvelles propositions, non contenues dans $A_1, ..., A_n$.

Avant d'expliquer plus concrètement le fonctionnement de la déduction naturelle avec des exemples et d'examiner les différentes règles de déduction nous souhaitons montrer à quoi ressemble graphiquement une déduction. La preuve de la validité de

$$p \to q, q \to r \vdash p \to q \wedge r$$

a la forme graphique suivante :

1	$p \to q$		
2	$q \to r$		
3		p	
4		q	$\Rightarrow$E, 1
5		r	$\Rightarrow$E, 2, 4
6		$q \wedge r$	$\wedge$I, 4, 5
7	$p \to q \wedge r$		$\Rightarrow$I, 3, 6

Les nombres à gauche de la figure sont le nombre de lignes de la déduction. La barre la plus à gauche délimite la déduction. Les lignes 1 et 2 contiennent les deux hypothèses, à savoir $p \to q$ et $p \to r$; la ligne 7 contient la conclusion $p \to q \wedge r$.

Ensuite sur chaque ligne se trouve de nouvelles propositions que nous avons découvertes. Les symboles tout à droite sont des abréviations des opérations que nous mettons en œuvre. Le symbole $\Rightarrow E$ est celui de l'élimination du conditionnel, $\wedge I$ est celui de l'introduction de la conjonction et $\Rightarrow I$ est celui de l'introduction du conditionnel. Les nombres à la droite de ces symboles sont les lignes auxquelles s'applique l'opération. Enfin la ligne verticale qui va de la ligne 3 à la ligne 6 représente un raisonnement dépendant d'une hypothèse auxiliaire. Sur la ligne 3 nous posons p comme hypothèse auxiliaire. Observez que les lignes qui correspondent aux hypothèses n'ont pas d'indications à droite de la formule. Tout ce qui est à l'intérieur (c'est-à-dire de la ligne 4 à la linge 6) n'est pas toujours valable, mais seulement lorsque nous considérons que p est valable, sous les hypothèses de départ. Donc tout ce qu'il y a à l'intérieur de l'hypothèse ne peut pas être utilisé à l'extérieur de l'hypothèse. La déduction consiste donc ici à poser les deux prémisses, puis poser une hypothèse, enfin utiliser successivement 4 règles de déduction pour arriver à la conclusion désirée.

La déduction naturelle s'effectue à l'aide de règles de déduction. Nous allons donc maintenant examiner les 9 règles dont nous avons besoin pour effectuer les déductions. Parfois, nous accompagnerons les règles avec une explication intuitive, qui fait référence à la notion de vérité. Cela nous permet de montrer que ces règles sont valable, mais il faut se rappeler que la vérité est une notion sémantique, tandis qu'ici nous nous concentrons sur une méthode syntaxique.

La répétition La règle est la suivante :

$$\begin{array}{r|ll} n & A & \\ \cline{2-2} m & A & \qquad \text{R}, n \end{array}$$

$[\text{R}, n]$ signifie répetition de la ligne n. Cette règle est très simple. Elle permet de répéter une formule. Si nous avons écrit la formule A sur une ligne n de notre déduction, nous pouvons réécrire A sur une autre ligne plus en bas m en notant R, n à la droite de la réécriture.

L'introduction de la conjonction La règle est la suivante :

$$\begin{array}{r|ll} n & A & \\ m & B & \\ \cline{2-2} s & A \wedge B & \qquad \wedge\text{I}, n, m \end{array}$$

$[\wedge\text{I}, n, m]$ signifie : introduction de la conjonction sur les formules des lignes n et m. Cette règle nous dit que si sur une ligne n nous avons une formule A et sur une autre ligne m nous avons une formule B, nous pouvons écrire sur une ligne plus en bas s la conjonction de ces deux formules $A \wedge B$ en écrivant $\wedge$I et le numéro des lignes des deux formules A et B.

Explication intuitive : si une proposition A est vraie et si une proposition B est vraie alors il s'ensuit que la conjonction de ces deux propositions $A \wedge B$ est aussi vraie. De ce fait nous pouvons déduire $A \wedge B$ de A et B.

L'élimination de la conjonction Les règles sont :

$$\begin{array}{l|l l}
n & A_1 \wedge A_2 & \\
\cline{2-2}
m & A_i & \wedge\mathrm{E},\ n
\end{array}$$

avec $i = 1$ ou $i = 2$. $[\wedge\mathrm{E}, n]$ signifie : élimination de la conjonction sur la formule de la ligne n. Cette règle nous dit que si nous avons une formule $A_1 \wedge A_2$ sur une ligne n, nous pouvons écrire A_i avec $i = 1$ ou $i = 2$ sur une ligne plus en bas m en notant à droite $\wedge$E et le numéro de la ligne où $A_1 \wedge A_2$ est écrit.

Explication intuitive : si une conjonction est vraie alors les propositions liées par la conjonction sont aussi vraies.

L'introduction de la disjonction Les règles sont :

$$\begin{array}{l|l l}
n & A_i & \\
\cline{2-2}
m & A_1 \vee A_2 & \vee\mathrm{I},\ n
\end{array}$$

avec $i = 1$ ou $i = 2$. $[\vee\mathtt{I}, n]$ signifie : introduction de la disjonction sur la formule de la ligne n. La règle nous dit que si on a une formule A_i avec $i = 1$ ou $i = 2$ sur une ligne n alors nous pouvons écrire $A_1 \vee A_2$ sur une ligne m plus en bas, et nous aurons A_i disjonct à gauche ou à droite avec une autre formule arbitraire.

Explication intuitive : si une proposition A_i avec $i = 1$ ou $i = 2$ est vraie, alors $A_1 \vee A_2$ est également vraie puisque pour qu'une disjonction soit vraie il suffit que l'une des deux propositions soit vraie.

L'élimination de la disjonction La règle est la suivante :

$$\begin{array}{l|l l}
n & A \vee B & \\
\cline{2-2}
m & \quad \begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} & \\
s & \quad \begin{array}{|l} C \end{array} & \\
t & \quad \begin{array}{|l} B \\ \hline \end{array} & \\
z & \quad \begin{array}{|l} C \end{array} & \\
u & C & \vee\mathrm{E},\ n,\ m,\ t
\end{array}$$

$[\vee\mathrm{E}, n, m, t]$ signifie : élimination de la disjonction de la ligne n à l'aide des formules des lignes m e t. La règle nous dit que si nous avons une proposition

$A \vee B$ sur une ligne n et que si de l'hypothèse auxiliaire A nous pouvons déduire la formule C et si de l'hypothèse auxiliaire B nous pouvons déduire encore la formule C, alors nous pouvons écrire C sur une ligne u plus en bas.

Explication intuitive : de la vérité de $A \vee B$ nous ne pouvons pas affirmer la vérité de A et nous ne pouvons pas non plus affirmer la vérité de B, parce que nous ne savons pas grâce auquels des disjoncts $A \vee B$ est vrai. Par contre, si en faisant l'hypothèse de A nous tombons sur une proposition C, et si ensuite en faisant l'hypothèse de B nous retombons sur la même proposition C, alors nous sommes sûrs que C est vrai, car sûrement l'un des deux disjoncts est vrai. De ce fait nous pouvons éliminer la disjonction de $A \vee B$ et affirmer C.

L'introduction du conditionnel La règle est la suivante :

$$
\begin{array}{l|l l}
n & \quad \begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} & \\
m & \quad \begin{array}{|l} B \end{array} & \\
s & A \rightarrow B & \Rightarrow\mathrm{I},\ n,\ m
\end{array}
$$

$[\Rightarrow \mathrm{I}, n, m]$ signifie : introduction du conditionnel sur les formules des lignes n et m. Cette règle nous dit que si nous faisons l'hypothèse A, et que nous découvrons grâce à cette hypothèse, en utilisant les règles de déduction, la vérité d'une formule B, nous pouvons écrire $A \rightarrow B$ en notant à sa droite $\Rightarrow$ I et la ligne de la formule supposée A et de la formule découverte B.

Explication intuitive : si à partir d'une hypothèse A nous en déduisons une proposition B, nous pouvons affirmer que la vérité de B provient de la vérité de A, et par conséquent que A implique B.

L'élimination du conditionnel La règle est la suivante :

$$
\begin{array}{l|l l}
n & A \rightarrow B & \\
m & A & \\ \cline{2-2}
s & B & \Rightarrow\mathrm{E},\ n,\ m
\end{array}
$$

$[\Rightarrow \mathrm{E}, n, m]$ signifie élimination du conditionnel de la formule de la ligne n à l'aide de la formule de la ligne m. Cette règle nous dit que si nous avons une formule $A \rightarrow B$ sur une ligne n et une formule A sur une autre ligne m, alors nous pouvons écrire la formule B sur une ligne s plus en bas en notant à droite $\Rightarrow$ E et le numéro des lignes des formules $A \rightarrow B$ et A.

Explication intuitive : si le conditionnel $A \rightarrow B$ est vrai et si A est vrai, nous pouvons en déduire que B est vrai. Cette règle est aussi appelée le *modus ponens*.

L'introduction de la négation La règle est la suivante :

$$
\begin{array}{r|l|ll}
n & & A & \\ \cline{3-3}
m & & B & \\
s & & \neg B & \\
t & \multicolumn{2}{l}{\neg A} & \neg\mathrm{I},\ n,\ m,\ s
\end{array}
$$

$[\neg \mathrm{I}, n, m, s]$ signifie : introduction de la négation sur la formule de la ligne n à l'aide des formules des lignes m et s. Cette règle nous dit que si nous faisons l'hypothèse A sur une ligne n, et que sous cette hypothèse nous avons la proposition B et la proposition $\neg B$, nous pouvons écrire $\neg A$ sur une ligne t plus en bas.

Explication intuitive : cette règle est une réduction à l'absurde. Si après avoir fait une hypothèse, disons A, nous pouvons en déduire une proposition et sa négative, B et $\neg B$, alors cela signifie que A est faux et donc que $\neg A$ est vrai.

L'élimination de la négation La règle est la suivante :

$$
\begin{array}{r|ll}
n & \neg\neg A & \\ \cline{2-2}
m & A & \neg\mathrm{E},\ n
\end{array}
$$

$[\neg \mathrm{E}]$ signifie : élimination de la négation sur la formule de la ligne n. Cette règle est très simple. Elle nous dit que si nous avons une formule $\neg\neg A$ sur une ligne n, alors nous pouvons écrire A sur une ligne m plus en bas.

Explication intuitive : si $\neg\neg A$ est vraie, alors $\neg A$ est fausse, et donc A est vraie. Cela est évident ... ou pas?

A l'aide de ces neuf règles nous allons maintenant voir comment il est possible de les appliquer à travers plusieurs exemples. Partons de $p, p \rightarrow q \vdash p \wedge q$. On commence toujours par noter les hypothèses :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & p \\
2 & p \rightarrow q \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Nous devons arriver à la proposition $p \wedge q$. Le schéma de déduction aura la forme suivante :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & p \\
2 & p \to q \\
\hline
\vdots & \vdots \\
? & p \wedge q
\end{array}
$$

Comment faire ? Nous avons p. Pour avoir $p \wedge q$, il nous faut q. Il est possible d'avoir q à l'aide de p et de $p \to q$ comme suit :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & p & \\
2 & p \to q & \\
\hline
3 & q & \Rightarrow\text{E, 1, 2}
\end{array}
$$

Maintenant que nous avons q, nous pouvons appliquer $\wedge$I :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & p & \\
2 & p \to q & \\
\hline
3 & q & \Rightarrow\text{E, 1, 2} \\
4 & p \wedge q & \wedge\text{I, 1, 3}
\end{array}
$$

Prenons un autre exemple : $p \wedge q \to r, q \to p, q \vdash r$. Posons d'abord les hypothèses, puis nous devons arriver à r. Nous aurons donc :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & p \wedge q \to r \\
2 & q \to p \\
3 & q \\
\hline
\vdots & \vdots \\
? & r
\end{array}
$$

En examinant les hypothèses, nous voyons que r est dans la ligne 1, $p \wedge q \to r$. Nous savons que si nous avons $p \wedge q$, alors à l'aide de la règle de l'élimination du conditionnel sur $p \wedge q \to r$ et $p \wedge q$, nous aurons r. Il nous faut donc $p \wedge q$. Nous avons q sur la ligne 3. Il nous faut donc p. A l'aide des deux hypothèses $q \to p$ et q nous pouvons obtenir p en appliquant la règle de l'élimination du conditionnel :

1	$p \wedge q \to r$	
2	$q \to p$	
3	q	
4	p	$\Rightarrow$E, 2, 3

Maintenant que nous avons p et que nous avons q nous pouvons facilement avoir $p \wedge q$:

1	$p \wedge q \to r$	
2	$q \to p$	
3	q	
4	p	$\Rightarrow$E, 2, 3
5	$p \wedge q$	$\wedge$I, 3, 4

Enfin, nous pouvons avoir r en appliquant la règle de l'élimination du conditionnel sur $p \wedge q \to r$ et $p \wedge q$. Cela nous donne le schéma final suivant :

1	$p \wedge q \to r$	
2	$q \to p$	
3	q	
4	p	$\Rightarrow$E, 2, 3
5	$p \wedge q$	$\wedge$I, 3, 4
6	r	$\Rightarrow$E, 1, 5

Considerons maintenant $p \vdash q \to p$. Commençons par noter les hypothèses. Ici il n'y en a qu'une seule :

1	p

Nous devons arriver à $q \to p$:

$$\begin{array}{r|l}
1 & p \\ \cline{2-2}
\vdots & \vdots \\
? & q \to p
\end{array}$$

La conclusion contient la proposition q qui ne se trouve pas dans la prémisse. Nous allons devoir faire une hypothèse. L'idée est de poser q en hypothèse auxiliaire et si nous arrivons à en déduire p nous pourrons, en appliquant la règle de l'introduction du conditionnel, avoir $q \to p$, qui est la conclusion désirée. Posons donc q comme hypothèse auxiliaire :

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & p & \\ \cline{2-2}
2 & & q \\ \cline{3-3}
\end{array}$$

Maintenant nous devons déduire p de q. Cela est en fait très simple : à l'aide de la règle de répétition nous pouvons réécrire toute proposition déjà obtenue. Nous pouvons donc répéter p sous q :

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & p & & \\ \cline{2-2}
2 & & q & \\ \cline{3-3}
3 & & p & \text{R, 1}
\end{array}$$

Pour finir nous pouvons avoir $q \to p$ en appliquant la règle de l'introduction du conditionnel sur 2 et 3, ce qui nous donne le schéma final suivant :

$$\begin{array}{r|l|ll}
1 & p & & \\ \cline{2-2}
2 & & q & \\ \cline{3-3}
3 & & p & \text{R, 1} \\
4 & q \to p & & \Rightarrow\text{I, 2, 3}
\end{array}$$

Passons maintenant à un autre exemple : $p \to q, q \to r \vdash p \to (q \wedge r)$. Nous posons d'abord les hypothèses, et nous écrivons le schéma général de la deduction :

$$\begin{array}{r|l}
1 & p \to q \\
2 & q \to r \\ \hline
\vdots & \vdots \\
? & p \to (q \wedge r)
\end{array}$$

Pour atteindre cette conclusion nous avons besoin que $q \wedge r$ soit déduit de p et de $q \wedge r$. Commençons par poser p en hypothèse auxiliaire :

$$\begin{array}{r|l}
1 & p \to q \\
2 & q \to r \\ \hline
3 & \quad \underline{\mid p}
\end{array}$$

Maintenant nous devons trouver $q \wedge r$ sous l'hypothèse auxiliaire p. Pour cela il nous faut q et il nous faut r. On peut avoir q en utilisant la règle de l'élimination du conditionnel sur $p \to q$ et p que nous venons de poser en hypothèse :

$$\begin{array}{r|ll}
1 & p \to q & \\
2 & q \to r & \\ \hline
3 & \quad \underline{\mid p} & \\
4 & \quad \mid q & \Rightarrow\text{E, 1, 3}
\end{array}$$

On peut avoir r à l'aide de la règle de l'élimination du conditionnel :

$$\begin{array}{r|ll}
1 & p \to q & \\
2 & q \to r & \\ \hline
3 & \quad \underline{\mid p} & \\
4 & \quad \mid q & \Rightarrow\text{E, 1, 3} \\
5 & \quad \mid r & \Rightarrow\text{E, 2, 4}
\end{array}$$

Nous utilisons maintenant la règle de l'introduction de la conjonction :

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & p \to q & & \\
2 & q \to r & & \\ \cline{2-2}
3 & \quad \mid\ p & & \\
4 & \quad \mid\ q & & \Rightarrow\text{E, 1, 3} \\
5 & \quad \mid\ r & & \Rightarrow\text{E, 2, 4} \\
6 & \quad \mid\ q \wedge r & & \wedge\text{I, 4, 5}
\end{array}
$$

Pour finir nous avons $p \to (q \wedge r)$, la conclusion désirée, à l'aide de la règle de l'introduction du conditionnel sur p et $q \wedge r$. Cela nous donne le schéma final suivant :

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & p \to q & & \\
2 & q \to r & & \\ \cline{2-2}
3 & \quad \mid\ p & & \\
4 & \quad \mid\ q & & \Rightarrow\text{E, 1, 3} \\
5 & \quad \mid\ r & & \Rightarrow\text{E, 2, 4} \\
6 & \quad \mid\ q \wedge r & & \wedge\text{I, 4, 5} \\
7 & p \to q \wedge r & & \Rightarrow\text{I, 3, 6}
\end{array}
$$

Faisons un exemple où nous appliquons les règles pour la négation : $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$. D'abord écrivons le schéma général de la déduction :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \neg q \to \neg p \\ \hline
\vdots & \vdots \\
? & p \to q
\end{array}
$$

Pour obtenir $p \to q$ en conclusion, nous devons déduire q de p. Mais ni p ni q sont dans notre hypothèse. La seule solution que l'on puisse mettre en œuvre est de faire hypothèse auxiliaire $\neg q$, et puis l'hypothèse auxiliaire p. Si nous trouvions une contradiction sous p, avec la règle de l'introduction de la négation, nous pourrons en déduire q. Donc, faisons l'hypothèse auxiliaire p, suivie d'une autre hypothèse auxiliaire $\neg q$:

$$
\begin{array}{rl}
1 & \mid \underline{\neg q \rightarrow \neg p} \\
2 & \mid \quad \mid \underline{p} \\
3 & \mid \quad \mid \quad \mid \underline{\neg q}
\end{array}
$$

Ici, nous pouvons appliquer l'élimination du conditionnel sur notre hypothèse $\neg q \rightarrow \neg p$:

$$
\begin{array}{rll}
1 & \mid \underline{\neg q \rightarrow \neg p} & \\
2 & \mid \quad \mid \underline{p} & \\
3 & \mid \quad \mid \quad \mid \underline{\neg q} & \\
4 & \mid \quad \mid \quad \mid \neg p & \Rightarrow\text{E, 1, 3}
\end{array}
$$

Maintenant, nous avons $\neg p$. Si on applique la règle de répetition sur l'hypothèse auxiliaire p, nous arrivons à une contradiction sous $\neg q$:

$$
\begin{array}{rll}
1 & \mid \underline{\neg q \rightarrow \neg p} & \\
2 & \mid \quad \mid \underline{p} & \\
3 & \mid \quad \mid \quad \mid \underline{\neg q} & \\
4 & \mid \quad \mid \quad \mid \neg p & \Rightarrow\text{E, 1, 3} \\
5 & \mid \quad \mid \quad \mid p & \text{R, 2}
\end{array}
$$

Cela nous permet d'appliquer l'introduction de la négation sur $\neg q$, nous donnant $\neg\neg q$ comme formule sous l'hypothèse auxiliaire p :

$$
\begin{array}{rll}
1 & \mid \underline{\neg q \rightarrow \neg p} & \\
2 & \mid \quad \mid \underline{p} & \\
3 & \mid \quad \mid \quad \mid \underline{\neg q} & \\
4 & \mid \quad \mid \quad \mid \neg p & \Rightarrow\text{E, 1, 3} \\
5 & \mid \quad \mid \quad \mid p & \text{R, 2} \\
6 & \mid \quad \mid \neg\neg q & \neg\text{I, 3}
\end{array}
$$

Et puis nous pouvons appliquer l'élimination de la négation sur $\neg\neg q$, nous donnant q comme formule sous l'hypothèse auxiliaire p :

1	$\neg q \to \neg p$	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad \neg q$	
4	$\quad\quad \neg p$	⇒E, 1, 3
5	$\quad\quad p$	R, 2
6	$\quad \neg\neg q$	¬I, 3
7	$\quad q$	¬E, 6

La déduction se termine en appliquant l'introduction du conditionnel sur p et q :

1	$\neg q \to \neg p$	
2	$\quad p$	
3	$\quad\quad \neg q$	
4	$\quad\quad \neg p$	⇒E, 1, 3
5	$\quad\quad p$	R, 2
6	$\quad \neg\neg q$	¬I, 3, 4, 5
7	$\quad q$	¬E, 6
8	$p \to q$	⇒I, 2, 7

L'exemple que l'on vient de donner nous montre que que, dans une déduction, on peut utiliser des résultats déjà obtenus pour simplifier des passages. C'est à dire que nous pouvons passer d'une formule A à une autre formule B si nous savons que $A \vdash B$; ce passage est une simplification car, au lieu de passer directement de A à B, nous pourrions écrire toute la déduction démontrant que $A \vdash B$. Il ne s'agit donc que d'un raccourci, qui coupe des passages intermédiaires, et qui est légitime à la lumière de l'existence d'une déduction déjà faite.

Montrons ce que nous entendons en démontrant la loi de Peirce : $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$. Comme ici il n'y a pas d'hypothèses avant le signe $\vdash$, l'idée est de poser une partie de la proposition à titre d'hypothèse auxiliaire et d'en déduire le reste de la proposition. Ici nous allons poser $(p \to q) \to p$ comme hypothèse auxiliaire, et en déduire p. Le schéma a la forme suivante :

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & & (p \to q) \to p \\ \cline{3-3}
\vdots & & \vdots \\
? & & p \\
? & \multicolumn{2}{l}{((p \to q) \to p) \to p}
\end{array}$$

Nous devons donc obtenir p sous $(p \to q) \to p$. Nous pourrions essayer d'obtenir une contradiction sous $\neg p$, pour qu'il soit possible d'introduire une négation donnant $\neg\neg p$, et puis de l'éliminer. Faisons donc l'hypothèse auxiliaire $\neg p$:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
1 & & \multicolumn{2}{l}{(p \to q) \to p} \\ \cline{3-4}
2 & & & \neg p \\ \cline{4-4}
\end{array}$$

Nous faisons une autre hypothèse auxiliaire, à savoir $\neg q$, et nous répétons la première :

$$\begin{array}{r|l|l|l|ll}
1 & & \multicolumn{3}{l}{(p \to q) \to p} & \\ \cline{3-5}
2 & & & \multicolumn{2}{l}{\neg p} & \\ \cline{4-5}
3 & & & & \neg q & \\ \cline{5-5}
4 & & & & \neg p & \text{R, 2}
\end{array}$$

Cela nous permet d'introduire l'implication sur $\neg q$ et $\neg p$:

$$\begin{array}{r|l|l|l|ll}
1 & & \multicolumn{3}{l}{(p \to q) \to p} & \\ \cline{3-5}
2 & & & \multicolumn{2}{l}{\neg p} & \\ \cline{4-5}
3 & & & & \neg q & \\ \cline{5-5}
4 & & & & \neg p & \\
5 & & & \multicolumn{2}{l}{\neg q \to \neg p} & \Rightarrow\text{I, 2, 4}
\end{array}$$

Or, nous savons que $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$. Nous pouvons écrire :

$$
\begin{array}{lll}
1 & (p \to q) \to p & \\
2 & \quad \neg p & \\
3 & \quad\quad \neg q & \\
4 & \quad\quad \neg p & \text{R, 2} \\
5 & \quad \neg q \to \neg p & \Rightarrow\text{I, 2, 4} \\
6 & \quad p \to q &
\end{array}
$$

De la ligne 5 nous sommes passés à la ligne 6, en écrivant $p \to q$ directement sous $\neg q \to \neg p$, sans faire tous les passages intermédiaire de l'exemple précédent, qui avait nous donné une déduction de $p \to q$ de $\neg q \to \neg p$. Maintenant, nous pouvons appliquer l'élimination du conditionnel sur $(p \to q) \to p$ et $p \to q$:

$$
\begin{array}{lll}
1 & (p \to q) \to p & \\
2 & \quad \neg p & \\
3 & \quad\quad \neg q & \\
4 & \quad\quad \neg p & \text{R, 2} \\
5 & \quad \neg q \to \neg p & \Rightarrow\text{I, 2, 4} \\
6 & \quad p \to q & \\
7 & \quad p & \Rightarrow\text{E, 1, 6}
\end{array}
$$

Nous répétons l'hypothèse auxiliaire $\neg p$:

$$
\begin{array}{lll}
1 & (p \to q) \to p & \\
2 & \quad \neg p & \\
3 & \quad\quad \neg q & \\
4 & \quad\quad \neg p & \text{R, 2} \\
5 & \quad \neg q \to \neg p & \Rightarrow\text{I, 2, 4} \\
6 & \quad p \to q & \\
7 & \quad p & \Rightarrow\text{E, 1, 6} \\
8 & \quad \neg p & \text{R, 2}
\end{array}
$$

Maintenant, nous pouvons introduire la négation sur $\neg p$, et puis l'éliminer :

1	$(p \to q) \to p$	
2	$\quad \neg p$	
3	$\qquad \neg q$	
4	$\qquad \neg p$	R, 2
5	$\quad \neg q \to \neg p$	⇒I, 2, 4
6	$\quad p \to q$	
7	$\quad p$	⇒E, 1, 6
8	$\quad \neg p$	R, 2
9	$\neg\neg p$	¬I, 2, 7, 8
10	p	¬E, 9

Finalement, nous introduisons le conditionnel sur $(p \to q) \to p$ et sur p :

1	$\quad (p \to q) \to p$	
2	$\qquad \neg p$	
3	$\qquad\quad \neg q$	
4	$\qquad\quad \neg p$	R, 2
5	$\qquad \neg q \to \neg p$	⇒I, 2, 4
6	$\qquad p \to q$	
7	$\qquad p$	⇒E, 1, 6
8	$\qquad \neg p$	R, 2
9	$\quad \neg\neg p$	¬I, 2, 7, 8
10	$\quad p$	¬E, 9
11	$((p \to q) \to p) \to p$	⇒I, 1, 10

Passons maintenant à des exemples avec d'autres foncteurs. Démontrons d'abord une chose assez simple : $p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$. Posons d'abord les hypothèses, et le schéma général de la preuve. Ici il y a qu'une seule hypothèse, donc

1	$p \vee (q \wedge r)$	
$\vdots$	$\vdots$	
?	$p \vee q$	

En partant de cette seule hypothèse qui est une disjonction, nous avons un seul choix celui d'éliminer cette disjonction. Pour cela nous allons devoir poser chaque relata de la disjonction comme hypothèse auxiliaire. Et sous chaque hypothèse nous allons devoir trouver la conclusion $p \vee q$. Commençons par poser les deux hypothèses auxiliaires :

1	$p \vee (q \wedge r)$	
2	$\quad \mid p$	
3	$\quad \mid q \wedge r$	

Nous devons maintenant trouver $p \vee q$ sous chacune des deux hypothèses auxiliaires. Commençons par la première, à savoir p. A partir de p il est très facile de déduire $p \vee q$. Il suffit d'appliquer la règle de l'introduction de la disjonction sur p :

1	$p \vee (q \wedge r)$	
2	$\quad \mid p$	
3	$\quad \mid p \vee q$	$\vee$I, 2
4	$\quad \mid q \wedge r$	

Maintenant nous devons trouver $p \vee q$ sous $q \wedge r$. Pour cela nous allons d'abord déduire q de $q \wedge r$ à l'aide de la règle de l'élimination de la conjonction, puis $p \vee q$ à partir de q et de la règle de l'introduction de la disjonction :

1	$p \vee (q \wedge r)$	
2	$\quad \mid p$	
3	$\quad \mid p \vee q$	$\vee$I, 2
4	$\quad \mid q \wedge r$	
5	$\quad \mid q$	$\wedge$E, 4
6	$\quad \mid p \vee q$	$\vee$I, 5

Nous pouvons maintenant déduire la conclusion désirée à l'aide de la règle de l'élimination de la disjonction :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & p \lor (q \land r) & \\
\cline{2-2}
2 & \quad \mid\ p & \\
3 & \quad \mid\ p \lor q & \lor\text{I, } 2 \\
4 & \quad \mid\ q \land r & \\
5 & \quad \mid\ q & \land\text{E, } 4 \\
6 & \quad \mid\ p \lor q & \lor\text{I, } 5 \\
7 & p \lor q & \lor\text{E, } 1,\ 2,\ 4
\end{array}
$$

Dans le dernier exemple nous allons démontrer le principe du tiers exclu : $\vdash p \lor \neg p$. Cette démonstration est la plus compliquée. Comme dans la démonstration de la loi de Peirce, il n'y a pas d'hypothèses : nous allons donc devoir commencer par poser une hypothèse. Cependant, contrairement à la démonstration précédente nous n'allons pas poser comme hypothèse une partie de la proposition. Nous allons utiliser la règle de l'introduction de la négation et donc nous allons poser comme hypothèse la négation de la proposition :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \quad \mid\ \neg(p \lor \neg p) \\
\vdots & \quad \mid\ \vdots \\
? & p \lor \neg p
\end{array}
$$

Nous allons alors devoir trouver une contradiction sous cette hypothèse pour pouvoir affirmer sa négation, à savoir $\neg\neg(p \lor \neg p)$, et utiliser l'élimination de la négation pour avoir $p \lor \neg p$. Pour avoir cette contradiction le plan est de poser p comme hypothèse auxiliaire, et d'essayer de trouver une contradiction ce qui nous donnera $\neg p$, puis d'essayer de trouver une nouvelle contradiction à partir de $\neg p$. Nous aurons alors essayer de trouver deux contradictions, ce qui nous permettra de nier l'hypothèse de départ, comme voulu. Commençons par la première sous hypothèse :

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \quad \mid\ \neg(p \lor \neg p) \\
2 & \quad \mid\ \quad \mid\ p
\end{array}
$$

Nous devons maintenant trouver une contradiction sous p. Nous avons déjà $\neg(p \vee \neg p)$. Si nous trouvons $p \vee \neg p$, alors nous aurons notre contradiction. $p \vee \neg p$ est très facile à trouver : nous avons seulement besoin d'utiliser la règle de l'introduction de la disjonction. Nous aurons alors notre contradiction et à l'aide de l'introduction de la négation nous aurons $\neg p$:

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \neg(p \vee \neg p) & \\
2 & \quad \quad \mid p & \\
3 & \quad \quad \mid p \vee \neg p & \vee\mathrm{I},\ 2 \\
4 & \quad \quad \mid \neg(p \vee \neg p) & \mathrm{R},\ 1 \\
5 & \quad \neg p & \neg\mathrm{I},\ 2,\ 3,\ 4
\end{array}$$

Mous pouvons obtenir encore $p \vee \neg p$, par introduction de la disjonction :

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \neg(p \vee \neg p) & \\
2 & \quad \quad \mid p & \\
3 & \quad \quad \mid p \vee \neg p & \vee\mathrm{I},\ 2 \\
4 & \quad \quad \mid \neg(p \vee \neg p) & \mathrm{R},\ 1 \\
5 & \quad \neg p & \neg\mathrm{I},\ 2,\ 3,\ 4 \\
6 & \quad p \vee \neg p & \vee\mathrm{I},\ 5
\end{array}$$

Maintenant, répétons l'hypothèse principale :

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad \neg(p \vee \neg p) & \\
2 & \quad \quad \mid p & \\
3 & \quad \quad \mid p \vee \neg p & \vee\mathrm{I},\ 2 \\
4 & \quad \quad \mid \neg(p \vee \neg p) & \mathrm{R},\ 1 \\
5 & \quad \neg p & \neg\mathrm{I},\ 2,\ 3,\ 4 \\
6 & \quad p \vee \neg p & \vee\mathrm{I},\ 5 \\
7 & \quad \neg(p \vee \neg p) & \mathrm{R},\ 1
\end{array}$$

Nous avons donc une contradiction sous $\neg(p \vee \neg p)$, ce qui nous permet de nier cette formule, et ensuite d'éliminer la négation :

1	$\quad \neg(p \vee \neg p)$	
2	$\quad\quad p$	
3	$\quad\quad p \vee \neg p$	$\vee$I, 2
4	$\quad\quad \neg(p \vee \neg p)$	R, 1
5	$\quad \neg p$	$\neg$I, 2, 3, 4
6	$\quad p \vee \neg p$	$\vee$I, 5
7	$\quad \neg(p \vee \neg p)$	R, 1
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg$I, 1, 6, 7
9	$p \vee \neg p$	$\neg$E, 8

Nous allons maintenant passer à la dernière section. Dans cette section nous allons aborder deux propriétés importantes du système de déduction naturelle pour la logique propositionnelle : la cohérence et la complétude.

12 Cohérence et complétude de LP

Lorsque nous avons traité de la sémantique formelle pour un langage de logique propositionnelle, nous avons identifié une propriété très importante entre les formules A et les ensembles de formules Γ, à savoir la conséquence logique, indiquée par $\Gamma \vDash A$. Dans cette relation, lorsque Γ est vide, A a la propriété d'être une tautologie, ce que l'on note par $\vDash A$.

En délimitant un système formel de logique propositionnelle nous avons aussi identifié une relation de dérivabilité d'une formule A à partir d'un ensemble de formules Γ, indiquée par $\Gamma \vdash A$. Dans cette relation, lorsque Γ est vide, A a la propriété d'être un théorème du système, noté $\vdash A$.

La question que nous voulons maintenant nous poser est la suivante : quelles relations existe-t-il entre la conséquence logique et la dérivabilité, et la tautologie et le théorème ? On pourrait notamment se demander : est-il vrai que A est une conséquence logique de Γ si et seulement si A peut être dérivé de Γ ? Ou aussi : est-il vrai que A est une tautologie si et seulement si A est un théorème ? Puisque les propriétés sémantiques dépendent de la signification attribuée aux composantes linguistiques en termes de vérité ou de fausseté, répondre positivement à ces questions reviendrait à découvrir que l'ensemble des règles adoptées pour la logique propositionnelle rend pleinement compte de la signification du langage auquel ces règles s'appliquent. En d'autres termes, cela signifie que nos règles ne sont pas simplement un jeu de symboles mais identifient des relations déductives fidèles à la manière dont nous utilisons ces formules dans le raisonnement. La réponse à nos deux questions est affirmative, comme nous allons le voir avec les propositions 12.1 et 12.2.

Proposition 12.1. Si $\Gamma \vdash A$, alors $\Gamma \vDash A$.

Preuve. Pour prouver ce résultat, il suffit de constater que les règles données pour les différentes constantes logiques identifient des relations de conséquence logique. En d'autres termes il nous suffit de constater que la conclusion des règles est une conséquence logique des prémisses - plus toute hypothèse sur ces prémisses. Le lecteur peut facilement vérifier que

- $A, B \vDash A \wedge B$ et $A_1 \wedge A_2 \vDash A_i$ $(i = 1, 2)$ - par rapport aux règles pour $\wedge$;
- $A \vDash A \vee B$ et, si $A_i \vDash B$ $(i = 1, 2)$, alors $A_1 \vee A_2 \vDash B$ - par rapport aux règles pour $\vee$;
- si $A \vDash B$, alors $\vDash A \to B$, et $A \to B, A \vDash B$ - par rapport aux règles pour $\to$;
- si $A \vDash B$ et $A \vDash \neg B$, alors $\vDash \neg A$ et, si $\neg A \vDash B$ et $\neg A \vDash \neg B$, alors $\vDash A$, e $A, \neg A \vDash B$ pour chaque formule B - par rapport aux règles pour $\neg$.

Maintenant, dire que $\Gamma \vdash A$, cela veut dire qu'il existe une dérivation Δ ayant pour hypothèses toutes et seulement les formules de Γ et pour conclusion A. Δ est composée des règles du système de déduction naturelle pour la logique propositionnelle. Mais ces règles identifient, comme indiqué, des relations de conséquence logique - sous des hypothèses possibles; ce qui signifie qu'elles sont toujours telles que, si les prémisses sont vraies, la conclusion sera également vraie. Par conséquent, dans le cas de Δ, la vérité est préservée, se transmettant des hypothèses à la conclusion. Donc, si nous faisons l'hypothèse que toutes les formules de Γ sont vraies, A sera aussi vrai, ce qui signifie que $\Gamma \vDash A$.

Proposition 12.2. Si $\Gamma \vDash A$, alors $\Gamma \vdash A$.

Nous ne donnerons pas ici la preuve de ce résultat. Notons cependant que si Γ est vide nous aurons comme cas particulier des propositions 12.1 et 12.2, que $\vdash A$ si et seulement si $\vDash A$. Un système formel de cette sorte, comme celui de la logique propositionnelle, pour lequel vaut un résultat analogue à la proposition 12.1 par rapport à une certaine sémantique, est dit *sémantiquement cohérent* sur une telle sémantique ; si un résultat analogue à la proposition 12.2 est également valide, le système est dit *sémantiquement complet* sur la sémantique de référence.

En conclusion, nous notons ce qui suit. Le résultat de la cohérence sémantique de `LP` par rapport à la sémantique binaire nous permet d'établir si et quand une certaine formule ne peut pas être dérivée à partir d'un certain ensemble de prémisses. Comme les règles de `LP` identifient uniquement les relations correctes entre les formules, vous ne pouvez pas y parvenir en restant dans `LP`; cependant, puisque nous savons que si $\Gamma \vdash A$, alors $\Gamma \vDash A$, nous savons aussi, au contraire, que si $\Gamma \nvDash A$, alors $\Gamma \nvdash A$. Par conséquent, pour vérifier qu'une certaine formule A ne peut être déduite d'un certain ensemble de formules Γ, il suffit de vérifier que A n'est pas une conséquence logique de Γ, et appliquer la proposition 12.1 pour conclure que A ne peut même pas être dérivé de Γ. C'est très important, car cela nous dit qu'il est toujours possible de décider si une certaine formule peut être dérivée d'un certain ensemble de formules, en fonction du caractère algorithmique des tables de vérité. C'est une condition idéale qui, cependant, ne dépend que du fait que la logique propositionnelle présente une complexité très faible; la propriété est en effet déjà perdue à l'étape suivante, en logique dite du premier ordre.

Exercices

1. Déterminer si les propositions suivantes sont atomiques ou complexes (justifier votre réponse):

    - $2 + 2 = 4$
    - Socrate est mortel
    - Si la balle frappe la vite elle la brise
    - Russell est un logicien et un philosophe
    - Sartre n'est pas un philosophe
    - Wittgenstein aime les fraises
    - Il faut choisir entre la bourse ou la vie

2. Traduire les propositions du langage ordinaire suivantes dans le langage du calcul des propositions

    - Soit $2^3 = 8$, soit $2^3 = 6$
    - Sartre n'est pas un philosophe
    - Bruce Willis est soit chauve soit rasé
    - Manchester United est Champion d'Angleterre et Champion d'Europe
    - Si je tombe de cette hauteur je risque de me faire mal
    - Je sors de la maison si et seulement si il pleut
    - Si Muse se produit à Paris et ne se produit pas à Marseille alors soit je monte à Paris et je vais les voir en concert, soit je quitte le pays et je ne reviens plus

3. Soit l'ensemble des formules du langage logique L par dont l'alphabet est composé par:

    - proposition atomiques : p, q, r, ...
    - foncteurs : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
    - parenthèses : (,)

    et qui est défini par les règles suivantes:

    R_1 chaque proposition atomique est une formule

    R_2 si A est un formule, $\neg A$ est un formule

    R_3 si A et B sont des formules, $A \wedge B$ est une formule

    R_4 si A et B sont des formules, $A \vee B$ est une formule

    R_5 si A et B sont des formules, $A \rightarrow B$ est une formule

    R_6 si A et B sont des formules, $A \leftrightarrow B$ est une formule

    R_7 rien d'autre n'est une formule

En justifiant la réponse avec ces règles, dire si les énoncés suivants sont des formules de L :

- $(p \to q) \wedge q$
- $p \wedge q \vee \neg \wedge p$
- $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(r \vee p)$
- $\neg p \ \neg q$
- $\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg p$
- $p \to \neg q \leftrightarrow \leftrightarrow p$
- p
- $r \ r$

4. Eliminer toutes les parenthèses possibles des propositions suivantes :

   - $\neg(\neg(\neg(p \wedge \neg(q))))$
   - $((p \wedge (q \vee \neg(\neg(r)))) \to (p \wedge (q \to (q \vee p))))$
   - $((p \wedge p) \to (q \vee (r \wedge (s \vee (t \to w)))))$
   - $(((p \wedge q))) \leftrightarrow (\neg(r \vee p))$

5. A l'aide des tables de vérité vérifier si les propositions suivantes sont valides :

   - $p \to (q \to p)$
   - $(p \vee q) \leftrightarrow p$
   - $p \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))$
   - $\neg p \to ((p \to q) \wedge \neg p)$
   - $(p \wedge \neg p) \to q$
   - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
   - $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

6. A l'aide des tables de vérité vérifier si :

   - $p \vee q, \neg q \vDash p$
   - $\neg(p \wedge (q \wedge r)), p \vDash \neg q \vee \neg r$
   - $p \to q, q \to r \vDash p \to r$
   - $\neg(p \wedge q) \vDash \neg p \vee \neg q$
   - $\neg(p \wedge (q \wedge r)) \vDash \neg p \vee (q \vee \neg r)$

7. A l'aide des tables de vérité vérifier si :

   - $p \vee \neg p$ est logiquement équivalent à $((p \to q) \to p) \to p$
   - p est logiquement équivalent à $(q \vee \neg q) \wedge p$

- $p \wedge q$ est logiquement équivalent à $(q \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
- $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow \neg p \wedge (\neg q \wedge r))$ est logiquement équivalent à r
- $p \vee (p \vee (p \vee (p \vee p)))$ est logiquement équivalent à p

8. A l'aide de la méthode des arbres vérifier si les propositions suivantes sont valides :
   - $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
   - $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$
   - $(q \vee \neg q) \vee (p \wedge q)$
   - $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
   - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (r \vee s))$
   - $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
   - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
   - $p \rightarrow p$
   - $((p \rightarrow \neg q) \wedge r) \vee (\neg p \leftrightarrow r)$
9. Effectuer les substitutions suivantes :
   - $p[q \wedge (r \wedge s)/p]$
   - $(p \wedge (\neg\neg q \wedge (r \vee s)) \rightarrow \neg\neg\neg q \vee \neg q)[r \wedge s/\neg q]$
   - $q \rightarrow (\neg\neg r \vee s)[p/q \rightarrow (\neg\neg r \vee s)]$
   - $q \rightarrow (\neg\neg r \vee s)[\neg\neg(q \rightarrow (\neg\neg r \vee s))/\neg r]$
   - $s \rightarrow (q \vee \neg s)[q/q]$
10. Trouver les formes normales disjonctives des propositions suivantes :
    - $p \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge \neg q))$
    - $p \wedge r \rightarrow \neg p \wedge q$
    - $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
    - $p \rightarrow (q \wedge \neg\neg p)$
    - $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$
11. A l'aide de la méthode de la déduction naturelle vérifier que :
    (a) $p, p \rightarrow q \vdash p \wedge q$
    (b) $(p \wedge q) \rightarrow r, q \rightarrow p, q \vdash r$
    (c) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$
    (d) $p \vdash q \rightarrow p$
    (e) $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

(f) $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$

(g) $p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$

(h) $q \wedge r \to \neg p, s \to p, r, s \vdash \neg q$

(i) $\vdash p \to p$

(j) $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

(k) $\vdash p \vee \neg p$

(l) $p \vee q, \neg p \vdash q$

(m) $p \vee q, p \to r, \neg s \to \neg q \vdash r \vee s$

(n) $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$

(o) $p \to q, p \to (q \to r) \vdash p \to r$

(p) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(q) $\neg p \vee q \vdash p \to r$

(r) $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$

Bibliographie

- E. W. Beth (1962), *Formal methods*, Reidel, Dordrecht.
- A. De Morgan (1966), *Logic: on the syllogism and other logical writings*, par P. Health, Routledge, Londres.
- F. B. Fitch, *Symbolic logic: an introduction*, Ronald Press Co., New York.
- G. Frege (1879), *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle.
- — (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Koebner, Breslau.
- — (1893 - 1903), *Die Grundgesetze der Arithmetik*, Pohle, Jena.
- — (1971), *Ecrits logiques et philosophiques*, par C. Imbert, Seuil, Paris.
- G. Gentzen (1934 - 1935), *Untersuchungen über das logische Schließen*, in *Matematische Zeitschrift*, XXXIX.
- J. Hintikka (1955), *Form and content in quantification theory*, dans *Acta Philosophica Fennica*.
- C. S. Peirce (1893), *An outline sketch of synechistic philosophy*, manuscrit.
- E. Post (1921), *Introduction to a general theory of elementary propositions*, dans *American Journal of Mathematics*.
- B. Russell & A. N. Whitehead (1962), *Principia Mathematica to *56*, Cambridge University Press, Cambridge.
- H. M. Sheffer (1913), *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants*, dans *Transactions of the American Mathematical Society*.
- D. Vernant (2001), *Introduction à la logique standard*, Flammarion, Paris.
- L. Wittgenstein (1922), *Tractatus logico-philosophicus*, Kegan, Paul, Trench & Co., Londres.